« سری‌ها، بسط تیلور و لوران و محاسبه مانده »

دنباله‌های مختلط

اگر به هر عدد طبیعی n عدد مختلط z_n را نسبت دهیم، آنگاه اعداد $z_1, z_2, \ldots, z_n$ یک دنباله مختلط را تشکیل می‌دهند. اگر حد دنباله‌ای زمانی که $n \to \infty$، عدد مشخص و معلوم z_0 باشد، $(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0)$ آنگاه گوئیم دنباله به سمت عدد z_0 همگراست. و اگر دنباله‌ای حد مشخصی نداشته باشد، آنگاه می‌گوئیم دنباله واگراست. دنباله $z_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ دنباله‌ای همگرا به عدد یک و دنباله $z_n = (-1)^n$ واگراست.

قضیه: دنباله $z_n = x_n + iy_n$ همگرا به $z_0 = x_0 + iy_0$ است، اگر و فقط اگر دنباله‌های حقیقی x_n به x_0 و y_n به y_0 همگرا باشد. در واقع اگر یکی از این دو شرط برقرار نباشد آنگاه دنباله واگرا خواهد بود.

برای مثال دنباله $z_n = (-1)^n + i(\frac{2}{3})^n$ واگرا است چون $x_n = (-1)^n$ واگراست.

سری‌های مختلط

اگر $\{z_n\}$ یک دنباله مختلط باشد، آنگاه مجموع جملات نامتناهی این دنباله را سری می‌گوئیم و آن را با نماد $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ نمایش می‌دهیم.

قضیه: سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ که $z_n = x_n + iy_n$ می‌باشد را به $z_0 = x_0 + iy_0$ همگرا می‌نامیم اگر و فقط اگر سری‌های $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ به ترتیب به x_0 و y_0 همگرا باشند.

تعریف همگرائی مطلق و مشروط

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ را همگرای مطلق می‌گوئیم هرگاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد و سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ را همگرای مشروط می‌گوئیم هرگاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ واگرا و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ همگرا باشد.

نکته۱: شرط لازم (اما نه کافی) برای همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ آن است که $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ باشد. واضح است که صفر بودن حد دنباله z_n وقتی $n \to \infty$ فقط شرط لازم برای همگرائی سری است و همگرائی خود سری باید بررسی شود ولی اگر حد دنباله صفر نبود، می‌توان نتیجه گرفت سری واگراست.

سری‌های توانی و به دست آوردن شعاع همگرایی آنها

یک سری توانی برحسب توانهای $z-z_\circ$ یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-z_\circ)^n$ که درآن $z_\circ$ یک عدد مختلط و n عددی طبیعی و دنباله C_n یک دنباله مختلط است، سری توانی نامیده می‌شود. سری توانی همواره در قرص $|z-z_\circ|<R$ همگراست و این قرص را قرص همگرائی، R را شعاع همگرائی و دایره $|z-z_\circ|=R$ را دایره همگرائی سری می‌گوییم. **برای به دست آوردن** شعاع همگرائی **از یکی از دو رابطه زیر استفاده می‌کنیم:**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\frac{1}{R} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\frac{1}{R}}$$

اگر $R=\infty$ باشد، سری برای همه مقادیر z همگرا می‌باشد و اگر $R=\circ$ سری فقط در $z_\circ$ همگرا و اگر $\circ<R<\infty$ آنگاه سری فقط برای مقادیر z که در نامساوی $|z-z_\circ|<R$ صدق می‌کنند، همگراست.

مثال۱: شعاع همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}z^n$ کدام است؟

۱) e^{-1} ۲) e ۳) $\circ$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(1-\frac{1}{n})^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1} \Rightarrow R=e$$

مثال۲: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2}{(2n)!(n+1)^2(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2}{n^2}\right|=4 \Rightarrow R=\frac{1}{4}$$

مثال۳: شعاع همگرایی $\sum_{n=\circ}^{\infty}(\cos in)z^n$ برابر کدام است؟

۱) e^{-1} ۲) e^{-2} ۳) $2e^{-1}$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۱» جمله عمومی به صورت $a_n=\cos in$ می‌باشد. می‌دانیم $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$، لذا $a_n=\cos in=\frac{e^{-n}+e^n}{2}$ پس داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{-(n+1)}+e^{(n+1)}}{2}}{\frac{e^{-n}+e^n}{2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-(n+1)}+e^{(n+1)}}{e^{-n}+e^n}\right)$$

با توجه به اینکه $n\to+\infty$، لذا جمله‌هایی با بزرگترین توان حاکم هستند:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n+1}}{e^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n.e^1}{e^n}\right)=e \Rightarrow R=e^{-1}$$

نکته۲: اگر $f(z)$ در نقطه $z_\circ$ تحلیلی باشد و بسط تابع $f(z)$ حول نقطه $z=z_\circ$ نوشته شود به فاصله نزدیکترین نقطه غیر تحلیلی تا $z_\circ$ شعاع همگرایی گفته می‌شود. (در واقع این مطلب تعریف شعاع همگرایی به زبانی دیگر است.)

مثال۴: شعاع همگرایی تابع $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$، حول نقطه $z_\circ=\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» اول نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ را حساب می‌کنیم:

$$z^2+4z-5=\circ \Rightarrow (z-1)(z+5)=\circ \Rightarrow z=1 \ , \ z=-5$$

کمترین فاصله نقطه $z_\circ=\circ$ از این دو نقطه شعاع همگرایی محسوب می‌شود. واضح است؛$|z-z_\circ|=|1-\circ|=1$، کمترین فاصله است، پس شعاع همگرایی برابر عدد یک است.

مثال۵: شعاع همگرایی تابع $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$، حول نقطه $z=4i$ کدام است؟

۱) $\pi-4$　　۲) $2\pi-4$　　۳) 4　　۴) $4\pi-4$

پاسخ: گزینه «۲» نوشتن بسط تیلور تابع حول $z=4i$ مشکل به نظر می‌رسد، نقاط غیر تحلیلی تابع $z=0$ و همچنین $z=2n\pi i$ می‌باشد که به ازای آنها مخرج صفر می‌شود، حالا باید ببینیم فاصله کدام‌یک از این نقاط از $z=4i$ کوچکتر از بقیه است. به راحتی مشخص است به ازای $n=1$، نقطه $z=2\pi i$ کمترین فاصله را از $z=4i$ دارد.

$$|2\pi i-4i|=|(2\pi-4)i|=2\pi-4$$

برای مثال نقاط دیگر مثل $z=0$ یا $z=4\pi i$، فاصله‌شان بیشتر است:

$$|0-4i|=|-4i|=4$$
(از $2\pi-4$ بزرگتر است.)

$$|4\pi i-4i|=|(4\pi-4)i|=4\pi-4$$
(از $2\pi-4$ بزرگتر است.)

بقیه نقاط نیز به همین ترتیب فاصله‌شان از $4i$ بیشتر از فاصله نقطه $2\pi i$ از $4i$ می‌باشد.

ناحیه همگرایی یک سری

برای به دست آوردن ناحیه همگرایی یک سری باید قدرمطلق عبارت شامل z را بدون در نظر گرفتن توان آن، کوچکتر یا مساوی $|\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}|$ قرار دهیم (c_n جمله عمومی سری است که فقط شامل n است) لازم به ذکر است حد فوق برای سری‌های توانی همان شعاع همگرایی است.

مثال۶: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz^2}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2>1$　　۲) $|x|>|y|$　　۳) تمام صفحه مختلط　　۴) $|x|<|y|$

پاسخ : گزینه «۲» حاصل حد برابر یک می‌باشد، لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{n+1}{n}|=1$$

$$|e^{-z^2}|<1 \Rightarrow |e^{y^2-x^2}.e^{-i2xy}|<1 \Rightarrow e^{y^2-x^2}<1 \Rightarrow y^2-x^2<0 \Rightarrow y^2<x^2 \Rightarrow |y|<|x|$$

برای روشن شدن روش حل فوق لازم به توضیح است، چون باید ضرب دو عدد $|e^{-i2xy}|.|e^{y^2-x^2}|$ کوچکتر از یک باشد و همواره $|e^{-i2xy}|=1$، لذا $|e^{y^2-x^2}|<1$ و برای این منظور باید $y^2-x^2<0$ باشد

روشی دیگر در محاسبه ناحیه همگرایی

در محاسبه ناحیه همگرایی در بعضی کتب به این روش عمل می‌کنند که طبق دو فرمول گفته شده دو حد زیر را کوچکتر از یک قرار می‌دهند.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|}<1} \quad \text{یا} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}|<1}$$

یعنی دیگر جمله عمومی و عبارت شامل z را جدا نمی‌کنند. در این کتاب و تمام تست‌های کنکور کارشناسی ارشد ما اغلب با همان روش سری توانی شعاع همگرایی و ناحیه همگرایی را حساب می‌کنیم. جهت آشنایی با این روش دو مثال زیر را با این روش حل می‌کنیم:

مثال۷: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} nze^{-nz^2}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2\le 0$　　۲) $x^2-y^2\ge 0$　　۳) $x^2-y^2<0$　　۴) $x^2-y^2>0$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)ze^{(-n-1)z^2}}{nze^{-nz^2}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)e^{-nz^2}\times e^{-z^2}}{ne^{-nz^2}}|=\lim_{n\to\infty}|(\frac{n+1}{n})e^{-z^2}|<1 \Rightarrow |e^{-z^2}|<1$$

$$\Rightarrow |e^{-(x^2-y^2+2ixy)}|<1 \Rightarrow |e^{y^2-x^2}.e^{-i2xy}|<1 \xrightarrow{|e^{-i2xy}|=1} |e^{y^2-x^2}|<1 \Rightarrow y^2-x^2<0 \Rightarrow x^2-y^2>0$$

مثال۸: ناحیه همگرایی سری $1+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right)+\frac{1}{3^2}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right)^2+\frac{1}{4^2}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right)^3+\cdots$ **کدام است؟**

۱) $x>\frac{y^2+1}{2}$ ۲) $x>-\frac{y^2+1}{2}$ ۳) $x<\frac{y^2+1}{2}$ ۴) $x<-\frac{y^2+1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» جمله عمومی به صورت $a_n=\frac{1}{n^2}$ می‌باشد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n^2}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right)^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right)\right|<1$$

حد $\frac{n^2}{(n+1)^2}$ وقتی $n\to\infty$ برابر یک می‌شود، لذا داریم:

$$\left|\frac{\operatorname{Re} z}{z+1}\right|<1\Rightarrow\left|\frac{x}{x+iy+1}\right|<1\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}<1\Rightarrow x^2<(x+1)^2+y^2\Rightarrow x^2<x^2+2x+1+y^2\Rightarrow x>-\frac{y^2+1}{2}$$

مثال۹: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+|z|}$ **به ازای کدام مقادیر z همگراست؟**

۱) $|z|<1$ ۲) $|z|\le 1$ ۳) فقط $|z|=1$ ۴) در کل صفحه مختلط همگراست.

پاسخ: گزینه «۴» برای حل این تست لازم است به دانش‌های ریاضی عمومی (۱) مراجعه کنیم:

یادآوری: برای اینکه سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(z)$، همگرا باشد باید $f_n(z)$ به صورت اکیداً نزولی باشد. در این تست چون $\frac{1}{n+|z|}$ نسبت به n اکیداً نزولی می‌باشد (با افزایش n، مقدار تابع $f_n(z)$، کم می‌شود) پس سری در کل صفحه مختلط همگرا می‌باشد. دقت کنید همگرایی به z بستگی ندارد و به ازای تمام مقادیر z سری همگرا می‌شود.

نکته۳: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری توانی مجاز می‌باشد و شعاع همگرایی سری مشتق و هم‌چنین شعاع همگرایی سری انتگرال یک سری توانی، همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

مثال۱۰: شعاع همگرایی کدام جفت سری زیر با هم یکسان است؟

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}z^n\quad,\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}z^{n+1}\quad,\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n+1}\quad,\quad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n}z^{n-1}$$

۱) فقط شعاع همگرایی سری a با سری b یکسان است.
۲) شعاع همگرایی سری a با سری c و شعاع همگرایی سری b با d یکسان است.
۳) شعاع همگرایی سری a با b و شعاع همگرایی سری c با d یکسان است.
۴) فقط شعاع همگرایی سری c و d با هم یکسان است.

پاسخ: گزینه «۲» شاید لازم به توضیح نباشد که محاسبه شعاع همگرایی هر یک از سری‌ها و مقایسه آن‌ها با یکدیگر کار وقت‌گیری است. اما با کمی دقت مشخص است، سری a، مشتق سری c و همچنین سری d مشتق دوم سری b می‌باشد و لذا شعاع همگرایی a با c و همچنین d با b یکی است.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n+1}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(n+1)z^n$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}z^{n+1}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}z^n\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n^2-1)}{n^2}z^{n-1}$$

نکته۴: اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$، دارای شعاع همگرایی R باشد، سری توانی $\sum a_n(z-z_0)^{nk}$ دارای شعاع همگرایی $\sqrt[k]{R}$ می‌باشد.

قضیه تیلور

اگر $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی و نقطه z_0 واقع در آن ناحیه باشد. در این صورت $f(z)$ را می‌توان با یک سری به صورت زیر نمایش داد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots$$

که در آن C_n از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

تذکر۱: بسط تیلور در کلیه نقاط داخل دایره‌ای به مرکز z_0 معتبر است، در واقع در داخل قرص $|z-z_0|<R$ این بسط معادل خود تابع می‌باشد که R فاصله z_0 تا نزدیکترین نقطه غیر تحلیلی تابع به z_0 است.

بسط مک‌لوران برخی توابع مهم که با فرض $z_0=0$ در بسط تیلور به دست می‌آید، به شرح زیر می‌باشد که به خاطر سپردن آنها کاملاً ضروری می‌باشد.

۱) $\sin z=\sum(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \quad , \quad |z|<\infty$

۲) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots \quad , \quad |z|<\infty$

۳) $\operatorname{tg} z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\cdots \quad , \quad |z|<\frac{\pi}{2}$

۴) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots \quad , \quad |z|<\infty$

۵) $\operatorname{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \quad , \quad |z|<1$

۶) $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots \quad , \quad |z|<1$

۷) $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+z^4-\cdots$

۸) $(1+z)^n=1+\frac{nz}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\cdots \ ,$

۹) $\sinh z=\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots \quad , \quad |z|<\infty$

۱۰) $\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots \quad , \quad |z|<\infty$

نکته۵: بسط‌های تیلور را در «ناحیه همگرایی مشترک» می‌توان با هم جمع، از هم کم، یا در هم ضرب و یا بر هم تقسیم نمود.

مثال۱۱: بسط مک‌لورن تابع $f(z)=\log(\frac{1+z}{1-z})$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3z^{2n+1}}{2n+1}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4z^{2n+1}}{2n+1}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از خاصیت لگاریتم داریم:

$$\log(\frac{1+z}{1-z})=\log(1+z)-\log(1-z)$$

اما بسط مک‌لورن تابع $\log(1+z)$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

با تبدیل z به $-z$ در طرفین تساوی بالا بسط مک‌لورن $\log(1-z)$ را هم می‌نویسیم:

$$\log(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots$$

$$\log(\frac{1+z}{1-z})=(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4})-(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4})=2z+\frac{2z^3}{3}+\frac{2z^5}{5}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

مثال ۱۲: سه جمله اول بسط مک‌لورن تابع $f(z)=tg^{-1}z$ کدام است؟

۱) $z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+-\cdots\ (|z|<1)$
۲) $z+\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+-\cdots\ (|z|<1)$
۳) $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots\ (|z|<1)$
۴) $z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots\ (|z|<1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از بسط‌های فوق یک راه حل ابتکاری به این صورت است که برای نوشتن بسط مکلورن تابع $tg^{-1}z$ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم: $f(z)=tg^{-1}z \Rightarrow f'(z)=\frac{1}{1+z^2}$

خب حالا بسط مکلورن تابع $\frac{1}{1+z^2}$ را می‌نویسیم، از بسط $\frac{1}{1+z}$ استفاده می‌کنیم و در طرفین به جای z، z^2 قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+-\cdots \Rightarrow f'(z)=\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+-\cdots\cdots$$

اگر این بار از طرفین تساوی فوق انتگرال بگیریم، داریم: $f(z)+C=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots \xrightarrow{f(0)=0} f(z)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots\cdots$

مثال ۱۳: بسط مک‌لورن تابع $f(z)=\frac{z}{z^2+9}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+2}},\ |z|<\sqrt{3}$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+1}},\ |z|<\sqrt{3}$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{2n+2}},\ |z|<\sqrt{3}$
۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{3^{2n+1}},\ |z|<\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل این مثال باید شکل تابع را به صورت $\frac{1}{1+u}$ در آوریم تا بتوانیم از فرمول این بسط استفاده کنیم:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+9}=\frac{z}{9(1+\frac{z^4}{9})}=\frac{z}{9}\left(\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}\right)$$

می‌دانیم با شرط $|z|<1$ بسط مقابل را داریم: $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$، حالا اگر فرض کنیم، $|\frac{z^4}{9}|<1$ و یا به عبارت دیگر $|z|<\sqrt{3}$، می‌توانیم از فرمول این بسط برای $f(z)$ استفاده کنیم.

$$\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^4}{9}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^4}{9}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}}$$

پس $f(z)$ به شکل مقابل نوشته می‌شود: $f(z)=\frac{z}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n}}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+1}}{3^{2n+2}}$

نکته ۶: اگر بخواهیم بسط تیلور تابع $f(z)$ را حول نقطه‌ی غیر صفر $(z_0\neq 0)$ بنویسیم باید از جانشینی $u=z-z_0$ استفاده کرده و سپس بسط تابع $f(u+z_0)$ را در $u=0$ بنویسیم.

مثال ۱۴: بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{1-z}$ حول نقطه $z=i$ را در ناحیه همگرایی تابع بنویسید و شعاع همگرایی آن را حساب کنید.

☑ **پاسخ:**

$$z-i=u \Rightarrow z=u+i$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z} \Rightarrow f(u)=\frac{1}{1-u-i}=\frac{1}{(1-i)(1-\frac{u}{1-i})}$$

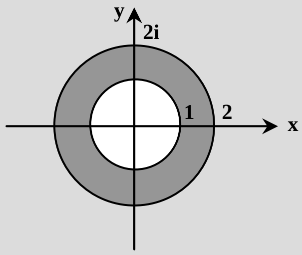
ناحیه همگرایی سری $|\frac{u}{1-i}|<1$ می‌باشد: $f(u)=\frac{1}{1-i}\left[\frac{1}{1-\frac{u}{1-i}}\right]=\frac{1}{1-i}\left[1+\frac{u}{1-i}+\frac{u^2}{(1-i)^2}+\cdots\right]$

حالا با جایگزینی $z-i$ به جای u داریم: $f(z)=\frac{1}{1-i}\left[1-\frac{z-i}{1-i}+\frac{(z-i)^2}{(1-i)^2}+\cdots\right]$

اما شعاع همگرایی به صورت روبرو حساب می‌شود: $|\frac{z-i}{1-i}|<1 \Rightarrow |z-i|<|1-i| \Rightarrow |z-i|<\sqrt{2}$

قضیه لوران (لورانت)

تابع $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2i)}$ را در نظر بگیرید، این تابع به ازای تمام zها بـه جـز دو نقطـه تکـین $z=1$ و $z=2i$ تحلیلـی اسـت. اگـر بـسط تیلـور را حول $z=0$ محاسبه کنیم، این بسط برای ناحیه $|z|<1$ معتبر است.



با این بسط حول $z=0$ ناحیه $|z|\geq 1$ در دسترس ما نیست و برای همین نمایش کلی‌تری معـروف بـه **سری لوران** وجود دارد که امکان بسط در هر طوق را که تابع در آن تحلیلی است را به ما می‌دهد. مثلاً برای تابع $f(z)$ سه حالت ممکن برای بسط لوران حول $z=0$ وجود دارد. یکـی ناحیـه $|z|>2$، یکـی طوق $1<|z|<2$ و دیگری ناحیه $|z|<1$ (که بسط لوران در ایـن ناحیـه در واقـع همـان سـری تیلـور تابع $f(z)$ است) پس ما با سری لوران می‌توانیم بسط تابع را حول نقطه تکین آن بنویسیم.

هرگاه $f(z)$ در ناحیه D (مثلاً طوق $R_1<|z-z_0|<R_2$) به جز نقطه z_0 واقع در D تحلیلی باشد، آنگاه تابع $f(z)$ را می‌توان با سری لـوران زیـر نمـایش داد:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

که در واقع با استفاده از سری لوران می‌توانیم تابع را حول نقاط تکین آن بسط دهیم کاری که با استفاده از سری تیلور ممکن نبود.

در رابطه فوق به عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$، **مقدار اصلی سری لوران** گفته می‌شود.

به عبارت دیگر سری لوران یک سری مرکب از توانهای صحیح مثبت و منفی $z-z_0$ است، کـه توانهـای مثبـت همـان سـری تیلـور حـول نقطـه $z=z_0$ می‌باشند. ضرایب سری لوران فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad , \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint(z-z_0)^{n-1}f(z)dz$$

البته در عمل از روش‌های دیگری برای محاسبه ضرایب سری لوران استفاده می‌شود.

مثال۱۵: عبارت $\frac{1}{1-z}$ در دو حالت یک بار بر حسب توان‌های مثبت z و بار دیگر بر حسب توان‌های منفی z بسط دهید.

☑ **پاسخ:** در حالت اول چون در ناحیه $|z|<1$ تابع تحیلی می‌باشد،پس همان بسط تیلور تابع نوشته می‌شود. می‌دانیم بسط تیلور $\frac{1}{1-z}$ به صـورت $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ می‌باشد، ولی یادتان نرود در این بسط باید شرط $|z|<1$ برقرار باشد. خب حالا اگر بخواهیم بسط تابع را برای ناحیه $|z|>1$ بنویسیم. چون نقطه $z=1$ داخـل منحنی بسته ما می‌افتد و به دلیل این‌که تابع در $z=1$ تحلیلی نیست، مجبور به استفاده از بسط لوران می‌شویم:

برای نوشتن توان‌های منفی z به این شکل عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}.(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})$$

دقت کنید چون در این حالت $|z|>1$ است، پس $\frac{1}{|z|}<1$ و این یعنی می‌توانیم بسط $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{z}}=(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)$$

با ضرب $-\frac{1}{z}$ در سری داریم:

$$-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

پس در ناحیه‌ای که تابع تحلیلی می‌باشد، همان بسط تیلور تابع را می‌نویسیم و در قسمت‌هایی که تابع تحلیلی نیست باید از بسط لوران استفاده کنیم.

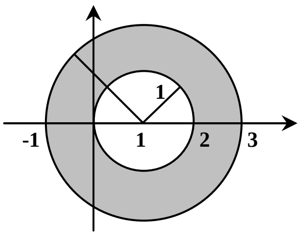
نکته۷: در نوشتن بسط لوران (حول نقطه z_0) ایجاد جمله‌هایی به صورت $z-z_0$ لازم است. برای توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها به صورت چند جمله‌ای می‌باشد، باید سعی کنیم توان‌های $(z-z_0)$ را در مخرج کسر ایجاد کنیم. در این‌گونه مسائل استفاده از دو بسط زیر کلید حل مسئله می‌باشد:

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n=1+u+u^2+\cdots \quad , \quad \frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n=1-u+u^2-u^3+\cdots$$

پس ما باید سعی کنیم توابعی به صورت $\frac{1}{1\pm u}$ ایجاد کنیم و چون این سری‌ها به شرط $|u|<1$ برقرار است، با استفاده از ناحیه‌های داده شده در صورت تست باید بسط را در ناحیه همگرایی بنویسیم. حل چند مثال این موضوع را برای ما روشن‌تر می‌کند.

مثال۱۶: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$، در طوق $1<|z-1|<2$ را بنویسید.

پاسخ: نقاط غیر تحلیلی تابع $z=1$ و $z=3$ می‌باشد. با توجه به طوق داده شده دقت کنید، نقطه $z=1$ داخل طوق نیست. ولی چون بسط حول $z=1$ خواسته شده و این نقطه، نقطه غیر تحلیلی است، باید بسط لوران را بنویسیم. پس لازم است توان‌های منفی $(z-1)$ را ایجاد کنیم. ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم.



$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}\Rightarrow A(z-3)+B(z-1)=z\Rightarrow (A+B)z-3A-B=z$$

$$\Rightarrow A+B=1\ ,\ -3A-B=0\Rightarrow A=\frac{-1}{2}\ ,\ B=\frac{3}{2}$$

پس $f(z)$ به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{3}{2}}{z-3}=\frac{3}{2(z-3)}-\frac{1}{2(z-1)}$$

خب حالا باید توان‌های منفی $z-1$ را ایجاد کنیم، جمله دوم که خود به خود این شکل را دارد، پس سراغ تغییر قیافه‌ی جمله اول یعنی $\frac{3}{2(z-3)}$ می‌رویم!

$$\frac{3}{2(z-3)}=\frac{3}{2(z-1-2)}=\frac{3}{2[(z-1)-2]}=\frac{3}{-4(1-\frac{z-1}{2})}=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}\right)$$

الان می‌خواهیم از همان بسط معروف استفاده کنیم، چون شرط $|z-1|<2$ داده شده، پس داریم:

$$|z-1|<2\Rightarrow\left|\frac{z-2}{2}\right|<1\Rightarrow -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}\right)=-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

پس بسط $f(z)$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$f(z)=-\frac{1}{2(z-1)}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

تذکر۲: سئوال مهمی که معمولاً دانشجویان می‌پرسند، این است که چه وقت دنبال ایجاد $\frac{k}{z-z_0}$ و چه وقت دنبال ایجاد $\frac{z-z_0}{k}$ باشیم، (k عددی طبیعی است.) جواب این است هر وقت در نوشتن بسط یک کسر، ریشه‌های مخرج آن کسر داخل ناحیه $|z-z_0|<R$ قرار داشت، باید در کسر به دنبال تولید $\frac{k}{z-z_0}$ باشیم و اگر ریشه‌های مخرج آن کسر داخل ناحیه قرار نداشته باشد، باید دنبال تولید $\frac{z-z_0}{k}$ باشیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال۱۷: سری لوران تابع $f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ را در ناحیه $1<|z|<2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا با استفاده از روش تجزیه کسرها $f(z)$ را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}$$

با توجه به ناحیه داده شده یعنی $1<|z|<2$ واضح است نقطه $z=1$ که یک نقطه غیر تحلیلی برای تابع می‌باشد، درون ناحیه قرار دارد، پس باید سری لوران را برای این تابع بنویسیم. چون $z_0=0$ پس باید توان‌های منفی $(z-0)$ یا به عبارت دیگر توان‌های منفی z را ایجاد کنیم، ابتدا برای جمله $\frac{1}{z-1}$

این کار را انجام می‌دهیم، دقت کنید $z=1$ داخل ناحیه $|z|>2$ قرار داردو باید دنبال تولید $\frac{1}{z}$ در مخرج باشیم، اگر در مخرج کسر از z فاکتور بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\cdot(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})$$

دقت کنید با توجه به شرط صورت سئوال، چون $|z|>1$ می‌باشد پس $\frac{1}{|z|}<1$، و می‌توانیم بسط عبارت داخل پرانتز را بنویسیم:

$$\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

از طرفی در نوشتن بسط $\frac{1}{z-2}$ چون $z=2$ خارج ناحیه $|z|<2$ قرار دارد، پس باید $\frac{z}{2}$ را تولید کنیم: قسمت دوم عبارت یعنی $-\frac{1}{z-2}$ را می‌توانیم با فاکتور گرفتن از عدد ۲- در مخرج کسر به شکل دلخواه در بیاوریم:

$$\frac{-1}{-2(1-\frac{z}{2})}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})$$

خب حالا با این استدلال که چون $|z|<2$، پس $|\frac{z}{2}|<1$ به راحتی مجوز استفاده از بسط معروف را برای خود صادر می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2\times 2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

پس تابع $f(z)$ در طوق $1<|z|<2$ به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

که البته اگر بخواهیم نمایش به صورت سری لوران با اندیس یک در بیاید با قرار دادن $n-1$ به جای n داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

مثال۱۸: تمام سری‌های لوران تابع $\frac{1}{z^3-z^4}$ را به مرکز صفر بنویسید.

☑ **پاسخ :** در این مسئله فرق نمی‌کند که $|z|<1$ و یا $|z|>1$ باشد، چون در هر دو حالت نقطه $z=0$ که نقطه غیر تحلیلی تابع می‌باشد، داخل ناحیه قرار می‌گیرد، پس باید در هر دو حالت توان‌های منفی z را ایجاد کنیم. می‌دانیم $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ از ضرب طرفین آن در $\frac{1}{z^3}$ (برای $|z|<1$) داریم:

$$\frac{1}{z^3-z^4}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\cdots$$

اما برای $|z|>1$ و $|\frac{1}{z}|<1$ و باید بر حسب توانهای منفی بسط را بنویسیم:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

با ضرب طرفین سری فوق در $\frac{1}{z^3}$ داریم:

$$\frac{1}{z^3-z^4}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+4}}=-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\cdots$$

مثال۱۹: بسط تابع $0<|z|<1$، $f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{z}+1-z+z^2-\cdots$　۲) $1-z+z^2-z^3+\cdots$　۳) $1+z-z^2+\cdots$　۴) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» جمله $\frac{1}{z}$ خود به خود وجود دارد و بسط جمله دوم را می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1+2z}{z+z^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}+1-z+z^2-z^3+\cdots$$

مثال۲۰: سری لوران تابع $f(z)=\frac{3}{z^2-z-2}$ در ناحیه $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^n}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n+1}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» $f(z)$ را با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به صورت $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}$ نوشت، از طرفی در ناحیه $|z|>2$ داریم:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}.(\frac{1}{1-\frac{2}{z}})=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

وقتی $|z|>2$، پس حتماً $|z|>1$ و به راحتی نتیجه می‌گیریم: $\frac{1}{|z|}<1$، پس بسط $-\frac{1}{z+1}$ در ناحیه موردنظر به صورت زیر است:

$$\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{z}.(\frac{1}{1+\frac{1}{z}})=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\times(-1)^n}{z\times z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

لذا داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

مثال۲۱: چند جمله اول سری لوران $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ به مرکز صفر کدام است؟

۱) $z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots$ ۲) $z+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$ ۳) $z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$ ۴) $z^2+z+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این نوع تست‌ها چون از نوع چند جمله‌ای و کسری نیستند با نوشتن بسط توابع به صورت مستقیم به جواب می‌رسند، با نوشتن بسط e^z و تبدیل z به $\frac{1}{z}$ در طرفین تساوی داریم:

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z^2})$$

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z^2})+\cdots]=z^2+z+\frac{1}{2}+\cdots$$

مثال۲۲: سه جمله اول بسط لوران تابع $f(z)=\frac{\sinh \pi z}{z^3}$ حول مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}$ ۲) $\frac{\pi}{z^2}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}$ ۳) $\frac{\pi}{z}+\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^3z^2}{5!}+\cdots$ ۴) $\frac{\pi}{z}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^3}{5!}+\cdots$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\frac{1}{z^3}(\sinh \pi z)=\frac{1}{z^3}(\pi z+\frac{\pi^3z^3}{3!}+\frac{\pi^5z^5}{5!}+\cdots)=\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5z^2}{5!}+\cdots$$

مثال۲۳: سه جمله اول سری لوران تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ در هر $z\neq 0$ است؟

۱) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}$ ۲) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{z^2}{120}$ ۳) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{z^2}{120}$ ۴) $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{z^2}{120}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}-\cdots$$

مثال۲۴: سری لوران تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi}$ حول نقطه $z=\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با تغییر متغیر $u=z-\pi$ داریم:

$$f(z)=f(u+\pi)=\frac{\sin(\pi+u)}{u}=-\frac{\sin u}{u}=-\frac{۱}{u}[u-\frac{u^۳}{۳!}+\cdots]=-۱+\frac{۱}{۳!}u^۲-\frac{۱}{۵!}u^۴+\cdots$$
$$=-۱+\frac{(z-\pi)^۲}{۳!}-\frac{۱}{۵!}(z-\pi)^۴+\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}(z-\pi)^{۲n}}{(۲n+۱)!}$$

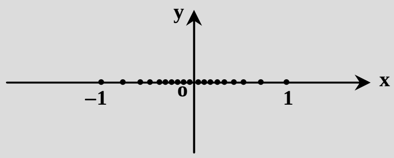
البته این بسط به نوعی از جنس سری تیلور است. (مقدار اصلی سری لوران را ندارد.)

تعریف نقطه تکین

نقطه $z=z_۰$ را نقطه **تکین** تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در $z_۰$ تحلیلی نباشد ولی *هر همسایگی* نقطه $z_۰$ شامل نقاطی باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد. نقطه $z=z_۰$ را یک نقطه **تکین تنها** برای تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در $z_۰$ غیر تحلیلی ولی *یک همسایگی* از $z_۰$ موجود باشد به طوری که $f(z)$ در *تمام نقاط* این همسایگی به جز خود $z_۰$ تحلیلی باشد. به عنوان مثالی ساده نقطه $z_۰=۰$ برای تابع $f(z)=\frac{۱}{z}$ یک نقطه تکین تنها می‌باشد، چون این تابع در نقطه $z_۰=۰$ تحلیلی نیست ولی در تمام نقاط به جز صفر (یعنی در هر همسایگی $z_۰$) تحلیلی می‌باشد.

اما نقطه $z_۰=۰$ برای تابع $f(z)=\log z$ یک نقطه تکین است ولی نقطه تکین تنها نیست. چون در $z=۰$ تابع غیر تحلیلی می‌باشد، پس می‌توانیم بگوییم نقطه تکین است ولی هر همسایگی حول مبدأ مختصات که در نظر گرفته شود، بالاخره شامل نقاطی روی محور حقیقی منفی است و می‌دانیم به ازای مقادیر منفی z، تابع $\log z$ تحلیلی نیست و این موضوع با تعریف نقطه تکین تنها، مطابقت ندارد. (چون ما باید بتوانیم یک همسایگی برای $z_۰=۰$ پیدا کنیم، که $f(z)$ در آنجا در تمام نقاط غیر از $z_۰$ تحلیلی باشد.)

به عنوان مثال آخر و مثالی مهم تابع $f(z)=\frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را در نظر بگیرید، برای این تابع نقاط تکین $z=۰$ و $z=\frac{۱}{k}$ (k عددی صحیح است) هستند که به ازای $z=۰$ مخرج مقدار مشخصی ندارد و به ازای $z=\pm۱\,,\pm\frac{۱}{۲}\,,\pm\frac{۱}{۳}$، مخرج $f(z)$ برابر صفری شود اما این نقاط تکین تنها هستند، چون حول تمام آن‌ها می‌توان یک همسایگی پیدا کرد که تابع در تمام آن نقاط تحلیلی باشد، اما نقطه $z=۰$ تکین غیر تنها است چون نمی‌توان در همسایگی آن، یک همسایگی پیدا کرد که تابع در آن‌جا شامل نقاط دیگری نباشد. در واقع در این تابع کلاً تکین‌ها به سمت نقطه $z=۰$ انباشته می‌شوند و به همین دلیل به تکین‌های غیر تنها، تکین‌های انباشته نیز می‌گویند.



تذکر۳: معمولاً نقاط تکین غیر تنها (انباشته) در توابعی به‌صورت فوق و هم‌چنین در نقاط شاخه‌ای توابع رادیکالی و لگاریتمی مشاهده می‌شود.

نکته۸: در بعضی توابع مانند $\bar{z}$ ، $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$، که هیچ جا تحلیلی نیستند، نقاط تکین تعریف نمی‌شود.

تذکر۴: اگر $z_۰$ یک نقطه تکین تنها برای $f(z)$ باشد، در این صورت $f(z)$ حول نقطه $z_۰$ دارای بسط لوران خواهد بود.

نکته۹: تمام نقاط تکین تنها برای تابع $f(z)$ برای توابع $\frac{۱}{\sin(f(z))}$ ، $\frac{۱}{\cos(f(z))}$ ، $\frac{۱}{\sinh(f(z))}$ و $\frac{۱}{\cosh(f(z))}$ تکین غیر تنها (انباشته) به حساب می‌آیند.

تکین برداشتنی

نقطه $z_۰$ را یک نقطه تکین برداشتنی می‌گویند هرگاه $f(z)$ در $z=z_۰$ تحلیلی نباشد ولی بتوان آن را طوری تعریف کرد که در $z_۰$ تحلیلی شود.

برای مثال نقطه $z_۰=۰$ برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z}(z\neq۰)$ یک نقطه تکین برداشتنی است چون اگر $g(z)$ را به صورت روبرو تعریف کنیم، داریم:

$$g(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & , z\neq۰\\ ۱ & , z=۰\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که $g(z)$ در $z=۰$ تحلیلی است. تعریف دیگری از تکین برداشتنی این است که به نقطه‌ای تکین برداشتنی می‌گوییم که بسط لوران آن شامل توان منفی $z-z_۰$ نباشد. (یعنی قسمت اصلی بسط لوران در آن وجود نداشته باشد.)

نکته۱۰: اگر ریشه مخرج کسر، ریشه صورت کسر هم باشد و حد عبارت را در این نقطه تکین (ریشه مخرج) حساب کردیم و برابر عددی حقیقی و مخالف بینهایت (∞) شد، آن‌گاه آن ریشه، تکین برداشتنی تابع است.

نکته۱۱: هرگاه $f(z)$ و $g(z)$ هر دو تحلیلی باشند و نقطه $z=z_۰$، برای هر دو تابع f و g صفر هم‌مرتبه باشد در این صورت $z_۰$ یک نقطه تکین برداشتنی برای تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ می‌باشد.

تکین اساسی

اگر بسط لوران شامل جمله‌های **نامتناهی** از توان‌های منفی $z-z_\circ$ باشد، آنگاه $z_\circ$ را نقطه تکین اساسی می‌نامیم. برای مثال توابع $\sin\frac{۱}{z}$ و $e^{\frac{۱}{z}}$ دارای نقطه تکین اساسی در $z=\circ$ هستند.

$$\sin\frac{۱}{z}=\frac{۱}{z}-\frac{۱}{۳!}(\frac{۱}{z^۳})+\frac{۱}{۵!}(\frac{۱}{z^۵})-\cdots \quad و \quad e^{\frac{۱}{z}}=۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!}(\frac{۱}{z^۲})+\cdots$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هر دو تابع شامل جملاتی با توان‌های منفی z هستند و تعداد این جملات نامتناهی است.

نکته۱۲: قطب‌های تابع $\frac{۱}{f(z)}$، نقطه تکین اساسی برای توابع $\sin(\frac{۱}{f(z)})$ و $\cos(\frac{۱}{f(z)})$، $e^{\frac{۱}{f(z)}}$، $\sinh(\frac{۱}{f(z)})$، $\cosh(\frac{۱}{f(z)})$ به حساب می‌آیند.

قطب

اگر بسط لوران شامل جمله‌های **متناهی** از توان‌های منفی $z-z_\circ$ باشد، آنگاه $z_\circ$ را یک قطب برای $f(z)$ می‌نامیم.

تعیین مرتبه قطب

با محاسبه $\lim\limits_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)^m f(z)$ در صورتی که $m=۱,۲,۳,...$ باشد، مقداری از m که به ازای آن برای اولین بار حد فوق برابر مقدار متناهی شود را مرتبه قطب می‌نامیم. یا به عبارت دیگر در بسط لوران تابع، بزرگترین توان m در عبارت $\frac{۱}{(z-z_\circ)^m}$ را مرتبه قطب می‌نامیم. اگر $m=۱$ باشد قطب را مرتبه اول و یا ساده می‌نامیم. برای مثال تابع $f(z)=\frac{۱}{z(z-۲)^۵}+\frac{۳}{(z-۲)^۲}$ یک قطب ساده در $z=\circ$ و یک قطب مرتبه ۵ در $z=۲$ دارد.

مثال۲۵: در نقطه $z=۱$ تابع $f(z)=e^{-\frac{۱}{(z-۱)^۲}}$ دارای:

۱) یک قطب مرتبه دوم است.
۲) یک نقطه تکین اساسی است.
۳) یک نقطه تکین برداشتنی است.
۴) هر دو گزینه ۱ و ۲ صحیح است.

پاسخ : گزینه «۲» بسط لوران را برای تابع می‌نویسیم:

$$e^{-\frac{۱}{(z-۱)^۲}}=۱-\frac{۱}{(z-۱)^۲}+\frac{۱}{۲!(z-۱)^۴}-\frac{۱}{۳!(z-۱)^۶}+\cdots$$

ملاحظه می‌گردد که $z=۱$ یک نقطه تکین اساسی است.

صفر تابع

اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و $z_\circ$ متعلق به این حوزه باشد، آنگاه $z_\circ$ را صفر تابع می‌نامیم هرگاه $f(z_\circ)=\circ$ باشد.

مرتبه صفر: اگر $z_\circ$ یک صفر تابع $f(z)$ باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن $f^{(n)}(z_\circ)\neq\circ$ باشد، را مرتبه صفر می‌نامیم.

برای مثال تابع $f(z)=z(e^z-۱)$ در $z=\circ$ دارای صفر مرتبه دوم است، چون $f(\circ)=f'(\circ)=\circ$ و $f''(\circ)=۲\neq\circ$، یعنی مشتق دوم آن مخالف صفر است.

یکی از روش‌های تعیین مرتبه صفر این است که حاصل $\lim\limits_{z\to z_\circ}\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^n}$ به دست می‌آوریم و اولین مقدار متناهی و مخالف صفر را به عنوان مرتبه صفر در نظر می‌گیریم.

نکته۱۳: نقطه $z_\circ$ را قطب مرتبه n ام $(n\geq۱)$ تابع $f(z)$ می‌باشد، اگر صفر مرتبه n ام تابع $g(z)=\frac{۱}{f(z)}$ باشد. از این تعریف در مواقعی که از تعریف‌های قبلی نمی‌توانیم مرتبه قطب را تعیین کنیم، استفاده می‌کنیم.

مثال۲۶: نقطه $z=0$ برای تابع $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2\cosh z}$، قطب مرتبه چندم می‌باشد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با تعریف $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=2+z^2-2\cosh z$، سعی می‌کنیم مرتبه صفر تابع $g(z)$ را حساب کنیم، برای این منظور باید از تابع $g(z)$ تا مرتبه‌ای مشتق بگیریم تا مقدار مشتق آن در نقطه $z=0$ مخالف صفر شود:

$$g'(z)=2z-2\sinh z \Rightarrow g'(0)=0 \quad , \quad g''(z)=2-2\cosh z \Rightarrow g''(0)=0$$
$$g'''(z)=-2\sinh z \Rightarrow g'''(0)=0 \quad , \quad g^{(4)}(z)=-2\cosh z \Rightarrow g^{(4)}(0)=-2\neq 0$$

پس $z=0$ قطب مرتبه چهارم تابع $f(z)$ می‌باشد.

مثال۲۷: برای تابع $f(z)=z^4+4z^2$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ صفر مرتبه دوم و $z=\pm 2i$ صفرهای ساده تابع هستند.

۲) $z=0$ صفر مرتبه سوم و $z=\pm 2i$ صفرهای مرتبه دوم تابع هستند.

۳) $z=0$ صفر مرتبه دوم و $z=\pm 2i$ صفرهای مرتبه دوم تابع هستند.

۴) $z=0$ صفر مرتبه سوم و $z=\pm 2i$ صفرهای ساده تابع هستند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f(z)=z^2(z^2+4)=0 \Rightarrow z=0\ ,\ z=\pm 2i$$
$$f'(z)=4z^3+8z \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2i)=4(2i)^3+8(2i)=-16i \end{cases}$$

دقت کنید $z=2i$ و به همین ترتیب $z=-2i$ چون اولین مشتق آنها مخالف صفر شده لذا صفر مرتبه اول (ساده) هستند، اما برای تعیین مرتبه صفر برای $z=0$ باید دوباره مشتق بگیریم:

$$f'(z)=12z^2+8 \Rightarrow f''(0)=8\neq 0$$

مثال۲۸: نوع نقطه تکین تابع $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}$ کدام است؟

۱) تابع دارای یک قطب برداشتنی در نقطه $z=1$ است.

۲) نقطه $z=1$ تکین اساسی تابع می‌باشد.

۳) $z=1$ قطب مرتبه اول تابع می‌باشد.

۴) $z=1$ قطب مرتبه دوم تابع می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای تعیین مرتبه قطب تابع $f(z)$ باید مرتبه صفرهای تابع $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ را تعیین کنیم: با توجه به این‌که $g(z)=\dfrac{2e^{z-1}-z^2-1}{\sin \pi z}$، ابتدا مرتبه صفر تابع $\psi(z)=2e^{z-1}-z^2-1$ را حساب می‌کنیم:

$$\psi'(z)=2e^{z-1}-2z \Rightarrow \psi'(1)=0\ ,\ \psi''(z)=2e^{z-1}-2 \Rightarrow \psi''(1)=0\ ,\ \psi'''(z)=2e^{z-1} \Rightarrow \psi'''(1)=2\neq 0$$

پس $z=1$ صفر مرتبه سوم $\psi(z)$ می‌باشد، اما $z=1$ یک صفر مرتبه اول برای تابع $Q(z)=\sin \pi z$ نیز می‌باشد، پس مرتبه صفر تابع $g(x)$ برابر $3-1=2$ می‌باشد و به عبارت دیگر مرتبه قطب $f(z)$ برابر ۲ می‌باشد.

مثال۲۹: در مورد تابع $f(z)=\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\exp(\frac{1}{z-2})}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ صفر مرتبه هفت و $z=2$ قطب ساده تابع است.

۲) $z=0$ صفر مرتبه هفت و $z=2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

۳) $z=2$ نقطه ویژه تنها نیست.

۴) $z=2$ نقطه ویژه اساسی و $z=-2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» کاملاً واضح است که $z=0$ صفر مرتبه هفتم تابع موردنظر است، اما با صفر قرار دادن مخرج عبارت $\exp(\frac{1}{z-2})$ و عبارت $(z^2-4)^2$ ملاحظه می‌گردد $z=2$ نقطه تکین اساسی و $z=-2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

محاسبه مانده (باقیمانده)

روش اول: اگر z_0 یک نقطه تکین تابع $f(z)$ باشد، آنگاه ضریب $\dfrac{1}{z-z_0}$ را در بسط لوران تابع $f(z)$ مانده می‌نامیم و آن را با b_1 (و در بعضی کتب با C_1) و یا $\operatorname{Res}[f(z)]\Big|_{z=z_0}$ نمایش می‌دهیم.

مثال۳۰: مانده تابع $f(z)=\frac{\sinh z}{z^۴}$ در نقطه $z=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵!}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{\sinh z}{z^۴}=\frac{۱}{z^۴}(z+\frac{z^۳}{۳!}+\frac{z^۵}{۵!}+\frac{z^۷}{۷!}+\cdots)=\frac{۱}{z^۳}+\frac{۱}{۳!}.\frac{۱}{z}+\frac{z}{۵!}+\frac{z^۳}{۷!}+\cdots$$

پس مانده در $z=۰$ برابر ضریب $\frac{۱}{z}$ یعنی $\frac{۱}{۶}$ است.

نکته۱۴: یادتان باشد، اگر $z=z_۰$ یک نقطه *تکین اساسی* برای تابع $f(z)$ باشد. برای تعیین مانده هیچ راهی جز استفاده از بسط لوران نداریم.

مثال۳۱: مانده تابع $f(z)=z^۷\cos\frac{۱}{z^۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۱۲}i$ ۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم نقطه $z=۰$، تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌باشد، تنها راه، نوشتن بسط لوران $\cos(\frac{۱}{z})$ می‌باشد:

$$\cos(\frac{۱}{z^۲})=۱-\frac{(\frac{۱}{z^۲})^۲}{۲!}+\frac{(\frac{۱}{z^۲})^۲}{۴!}-\frac{(\frac{۱}{z^۲})^۶}{۶!}+\cdots\Rightarrow f(z)=z^۷\cos(\frac{۱}{z^۲})=z^۷-\frac{z^۷}{۲!z^۴}+\frac{z^۷}{۴!z^۸}-\frac{z^۷}{۶!z^{۱۲}}+\cdots$$

ضریب $\frac{۱}{z}$ در بسط فوق برابر $\frac{۱}{۴!}$ می‌باشد، پس مانده برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است.

مثال۳۲: مانده تابع $f(z)=z^۲\sin(\frac{۱}{z+۱})$ در نقاط تکین $f(z)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $-\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۷}{۶}$

پاسخ: گزینه «۲» این تست یک مثال جالب می‌باشد که کمی ابتکار هم لازم دارد، به راحتی معلوم است نقطه $z=-۱$، تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌باشد. تنها راه، استفاده از بسط لوران است پس بسط $\sin(\frac{۱}{z+۱})$ را می‌نویسیم:

$$\sin(\frac{۱}{z+۱})=\frac{۱}{z+۱}-\frac{۱}{۳!(z+۱)^۳}+\frac{۱}{۵!(z+۱)^۵}-\cdots$$

خب حالا اگر عبارت $z^۲$ در بسط فوق ضرب شود. به نظر شما به راحتی جمله $\frac{۱}{z+۱}$ مشخص می‌شود؟ جواب من که منفی است شما را نمی‌دانم! اگر $z^۲$ را به شکل $[(z+۱)-۱]^۲$ بنویسیم، فکر کنم مشکل حل شود:

$$z^۲\sin(\frac{۱}{z})=[(z+۱)^۲-۲(z+۱)+۱][\frac{۱}{z+۱}-\frac{۱}{۳!(z+۱)^۳}+\frac{۱}{۵!(z+۱)^۵}-\cdots]$$

حالا اگر دقت کنیم، جمله $\frac{۱}{z+۱}$ به دو شکل ایجاد می‌شود، یکی با ضرب $(z+۱)^۲$ در $-\frac{۱}{۳!(z+۱)^۳}$ و یکی هم با ضرب عدد ۱ در $\frac{۱}{z+۱}$ پس داریم:

$$-\frac{(z+۱)^۲}{۳!(z+۱)^۳}+\frac{۱}{z+۱}=-\frac{۱}{۳!(z+۱)}+\frac{۱}{z+۱}\Rightarrow-\frac{۱}{۳!}+۱=-\frac{۱}{۶}+۱=\frac{۵}{۶}$$

مثال۳۳: مانده تابع $f(z)=(z-۳)\sin\frac{۱}{z+۲}$ در نقطه تکین $z=-۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵- ۳) ۱ ۴) ۵+

پاسخ : گزینه «۲» تقریباً شبیه تست بالایی می‌باشد:

$$\sin\frac{۱}{z+۲}=\frac{۱}{z+۲}-\frac{۱}{۳!(z+۲)^۳}+\cdots$$

$$f(z)=(z-۳)\sin(\frac{۱}{z+۲})=[(z+۲)-۵]\sin(\frac{۱}{z+۲})=\frac{(z+۲)}{z+۲}-\frac{(z+۲)}{۳!(z+۲)^۳}+\cdots-\frac{۵}{z+۲}+\frac{۵}{۳!(z+۲)^۲}$$

ملاحظه می‌گردد مانده یا همان ضریب $\frac{۱}{z+۲}$ برابر ۵- است.

روش دوم محاسبه مانده

هرگاه $z_{\circ}$ یک قطب از مرتبه m برای تابع $f(z)$ باشد، آنگاه b_{1} (مانده) برای تابع $f(z)$ در $z=z_{\circ}$ را علاوه بر استفاده از بسط لوران می‌توان از فرمول زیر نیز حساب کرد:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_{\circ}} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_{\circ}}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_{\circ})^{m}f(z)]}$$

به طور خاص برای قطب مرتبه اول (قطب ساده) داریم:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_{\circ}} f(z)=\lim_{z\to z_{\circ}}(z-z_{\circ})f(z)}$$

مثال ۳۴: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^{2}}$ در نقطه $z=1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{4}$　۲) $\frac{1}{4}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^{2}}=\frac{1}{4}$$

مثال ۳۵: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^{2}}$ در نقطه $z=-1$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $-\frac{1}{2}$　۳) $-\frac{1}{4}$　۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}[\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-1})]=\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^{2}}=-\frac{1}{4}$$

مثال ۳۶: مبدأ مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^{2}}$ دارد و مانده در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) قطب ساده و مانده برابر یک است.　۲) قطب مرتبه دوم و مانده برابر یک است.

۳) صفر ساده و مانده برابر صفر است.　۴) تکین برداشتنی و مانده برابر یک است.

پاسخ : گزینه «۱»

$$\lim_{z\to \circ}(z-\circ)^{m}f(z)=\lim_{z\to \circ}z^{m}.\frac{\sin z}{z^{2}}\xrightarrow{m=1}\lim_{z\to \circ}\frac{\sin z}{z}=1$$

ملاحظه می‌گردد قطب ساده است و داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=\circ} f(z)=\lim_{z\to \circ}zf(z)=\lim_{z\to \circ}z.\frac{\sin z}{z^{2}}=1$$

مثال ۳۷: تابع $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^{4}}$ در $z=1$:

۱) دارای بسط تیلور است.　۲) بسط لوران ندارد.

۳) دارای بسط لوران با مانده $\frac{e^{2}}{4}$ است.　۴) دارای بسط لوران با مانده $\frac{4e^{2}}{3}$ است.

پاسخ : گزینه «۴» $z=1$ قطب مرتبه چهارم تابع است:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 1}(e^{2z})'''=\frac{8e^{2}}{3!}=\frac{4e^{2}}{3}$$

مثال ۳۸: مانده تابع $f(z)=\dfrac{1}{1-e^{z}}$ در $z=\circ$ کدام است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) -۱　۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» $z=\circ$ یک قطب ساده برای تابع $f(z)$ است، لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=\circ} f(z)=\lim_{z\to \circ}\frac{z}{1-e^{z}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{z\to \circ}\frac{1}{-e^{z}}=-1$$

مثال۳۹: مانده تابع $f(z)=\dfrac{۱}{z(z+۲)^۳}$ در نقطه $z=-۲$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۱}{۸}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۸}$

پاسخ : گزینه «۴» ملاحظه می‌گردد $z=-۲$ قطب مرتبه سوم تابع است، لذا داریم:

$$\underset{z=-۲}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{۱}{(۳-۱)!}\lim_{z\to-۲}\frac{d^۲}{dz^۲}[(z+۲)^۳\times\frac{۱}{z(z+۲)^۳}]=\frac{۱}{۲}\lim_{z\to-۲}[\frac{۱}{z}]''=\frac{۱}{۲}\lim_{z\to-۲}\frac{۲}{z^۳}=-\frac{۱}{۸}$$

تذکر۵: اگر $z_\circ$ یک قطب برداشتنی تابع $f(z)$ باشد، آنگاه مانده در $z_\circ$ همواره برابر صفر است.

تذکر۶: اگر $z_\circ$ یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد، آنگاه مانده در این نقطه همواره مخالف صفر است.

روش سوم محاسبه مانده

اگر $z_\circ$ یک قطب ساده تابع $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ باشد و $g(z_\circ)\neq\circ$، آنگاه مقدار مانده برابر $\underset{z=z_\circ}{\mathrm{Res}}f(z)=\dfrac{g(z_\circ)}{h'(z_\circ)}$ خواهد بود.

مثال۴۰: باقیمانده تابع $f(z)=\dfrac{z^۲}{(z-۲)(z^۲+۱)}$ در نقطه $z_\circ=i$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۴}{۵}$ ۲) $\dfrac{۱+۲i}{۱۰}$ ۳) $\dfrac{۱-۲i}{۱۰}$ ۴) $\dfrac{۲i-۱}{۱۰}$

پاسخ : گزینه «۳» اگر $z^۲+۱$ را تجزیه کنیم برابر $(z-i)(z+i)$ می‌شود، پس $z_\circ=i$ که ریشه ساده مخرج است، قطب ساده $f(z)$ است:

$$f(z)=\frac{z^۲}{(z-۲)(z^۲+۱)}\ ,\ \begin{cases}g(z)=z^۲\ ,\ h(z)=(z-۲)(z^۲+۱)\\ h'(z)=۳z^۲-۴z+۱\end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد $g(i)=-۱$، لذا داریم:

$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{g(i)}{h'(i)}=\frac{i^۲}{۳i^۲-۴i+۱}=\frac{-۱}{-۲-۴i}=\frac{۱}{۲+۴i}\times\frac{۲-۴i}{۲-۴i}=\frac{۲-۴i}{۴+۱۶}=\frac{۱-۲i}{۱۰}$$

مثال۴۱: مانده تابع $f(z)=\dfrac{z^۲+۱}{۴z^۴+۳z^۳+z}$ در $z=-۱$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $-\dfrac{۲\pi i}{۳}$ ۴) $-\dfrac{\pi i}{۳}$

پاسخ : گزینه «۱» با در نظر گرفتن $g(z)=z^۲+۱$ و $h(z)=۴z^۴+۳z^۳+z$ داریم:

$$\underset{z=-۱}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{g(-۱)}{h'(-۱)}=\frac{(-۱)^۲+۱}{۱۶(-۱)^۳+۹(-۱)^۲+۱}=-\frac{۱}{۳}$$

محاسبه مانده توابع خاص

در بعضی توابع کسری که معمولاً قطب‌های تابع از درجه سوم و یا بالاتر هستند، استفاده از فرمول و محاسبه مشتق کار وقت‌گیر و توأم با خطا می‌باشد، در این‌گونه مسائل بهترین روش نوشتن بسط توابع و استفاده از خواص همان دو بسط معروف و در بعضی موارد نیزتقسیم عبارت صورت بر مخرج و به دست آوردن ضریب $\dfrac{۱}{z}$ از هر یک از دو روش فوق می‌باشد. مثال‌های زیر این موضوع را روشن می‌کند:

مثال ۴۲: مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{1-\cos z}$ **در نقطه تکین تنهای** $z=0$ **کدام است؟**

۱) ۲- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}}{\frac{z^2}{2!}(1-\frac{2!z^2}{4!}+\frac{2!z^4}{6!}+\cdots)}$$

خب حالا اگر بسط عبارت داخل پرانتز مخرج را بنویسیم، $f(z)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود، دقت کنید از بسط $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots$ استفاده می‌کنیم:

$$f(z)=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)\times\frac{2!}{z^2}(1+\frac{2!}{4!}z^2+\cdots)$$

دقت کنید اگر $\frac{2!}{z^2}$ در جملات پرانتز دوم ضرب شود، داریم:

$$f(z)=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!})(\frac{2!}{z^2}+\frac{2!}{4!}+\cdots)$$

فقط جمله‌ای که از ضرب z در $\frac{2!}{z^2}$ می‌باشد، $\frac{1}{z}$ را تولید می‌کند، لذا ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $2!$ است.

تذکر ۷: البته این مثال راه‌حل ساده‌تری نیز دارد ولی مثال بعد ارزش این روش را مشخص می‌کند.

مثال ۴۳: مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cot gz.\cot ghz}{z^3}$ **در نقطه** $z=0$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{7}{45}$ ۲) $\frac{3}{45}$ ۳) $+\frac{7}{45}$ ۴) $\frac{-3}{45}$

پاسخ: گزینه «۱» شاید به جرأت بتوان گفت این تست از سخت‌ترین تست‌های محاسبه مانده می‌باشد و کمتر کسی از پس حل آن بر می‌آید، اما با کمی دقت شما قدرت پاسخگویی به آن را دارید، اول بسط مک‌لورن تمام توابع را می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{\cot gz\cot ghz}{z^3}=\frac{1}{z^3}(\frac{\cos z}{\sin z}\cdot\frac{\cosh z}{\sinh z})=\frac{1}{z^3}\times\frac{(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots)(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots)}{(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots)}$$

با فاکتوری از z^2 در مخرج کسر داریم:

$$=\frac{1}{z^5}\times\frac{(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots)(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots)}{(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)}$$

خب حالا عملیات اصلی و تکنیک حل تست باید اجرا شود:

در مخرج کسر می‌خواهیم از بسط استفاده کرده و آن را به صورت ببریم، طبیعی است عبارت صورت کسر باید به صورت $1\pm az^4$ شود، تا وقتی در $\frac{1}{z^5}$ ضرب می‌شود $\frac{1}{z}$ را تولید کند، و می‌توانیم از بقیه جملات که ضرب آن‌ها در $\frac{1}{z^5}$، عبارت $\frac{1}{z}$ تولید نمی‌کند، صرف‌نظر کنیم. از طرفی به خاطر اینکه عدد ۱ موجود در پرانتزی که به صورت می‌بریم. در عبارت z^4 صورت کسر ضرب می‌شود، یک جمله z^4 تولید می‌کند، لذا وقتی دو پرانتز صورت را در هم ضرب می‌کنیم، می‌توانیم از جملات دیگر صرف‌نظر کنیم:

ضرب دو پرانتز مخرج درهم $=1+z^4\underbrace{(\frac{1}{120}-\frac{1}{36}+\frac{1}{120})}_{-\frac{1}{90}}+\cdots$ و ضرب دو پرانتز صورت درهم $=1+z^4(\frac{1}{24}-\frac{1}{4})+\cdots$

پس $f(z)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\times\frac{(1-\frac{z^6}{6}+\cdots)}{(1-\frac{z^4}{90}+\cdots)}=\frac{1}{z^5}(1-\frac{z^4}{6}+\cdots)(1+\frac{z^4}{90}+\cdots)=\frac{1}{z^5}[1+(\frac{1}{90}-\frac{1}{6})z^4+\cdots]=[\frac{1}{z^5}-\frac{7}{45z}+\cdots]$$

ملاحظه می‌کنید ضریب $\frac{1}{z}$ و یا همان مانده برابر $-\frac{7}{45}$ به دست آمد. ضمن عرض خسته نباشید لازم به تذکر است تست به جهت حل یک مثال بسیار سخت در کتاب آورده شده و حل آن در صورت اضافه وقت و همچنین افزایش توانمندی هر چه بیشتر دانشجویان توصیه می‌گردد. قابل ذکر است. در امتحانات پایان ترم دانشگاه کشورهای روسیه، آمریکا و هندوستان و همچنین چند کشور دیگر این مسئله مطرح شده بود.

نکته۱۵: مانده توابع زوج همواره برابر صفر است. برای مثال مانده تابع $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$ در نقطه $z=0$ برابر صفر است. مانده در نقطه $z=0$ ضریب z^{-1} است، اما چون $f(z)$ تابعی زوج است لذا بسط لوران آن حول نقطه $z=0$ نمی‌تواند توانهای فرد z را داشته باشد.

نکته۱۶: اگر تابع $h(z)$ یک صفر از مرتبه $(m+1)$ و $g(z)$ یک صفر از مرتبه m در نقطه $z=z_0$ داشته باشند. می‌توانیم نتیجه بگیریم تابع $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ یک قطب ساده در $z=z_0$ دارد و مانده در این نقطه از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=(m+1)\frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m+1)}(z_0)}}$$

از این فرمول زمانی استفاده می‌شود که آن عددی که مخرج را صفر می‌کند، صورت را نیز صفر کند (که البته باید مرتبه صفر مخرج آن یکی بیشتر از صورت کسر باشد) بدیهی است از فرمول قبل نمی‌توانیم مانده این‌گونه توابع را حساب کنیم، چون در فرمول قبل باید $g(z_0)\neq 0$ باشد. البته لازم است بدانید این‌گونه تست‌ها تا کنون کمتر مطرح شده و در ضمن در صورت فراموشی فرمول، می‌توانیم بسط لوران صورت و مخرج کسر را نوشته و عبارت صورت را بر عبارت مخرج تقسیم کرده و ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ را تعیین کنیم.

مثال۴۴: مانده تابع $f(z)=\frac{2\sinh z}{1-\cosh z}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ: گزینه «۴» اول باید تعیین کنیم $z=0$ برای توابع $g(z)=2\sinh z$ و $h(z)=1-\cosh z$، صفر مرتبه چندم است:

$$g(z)=2\sinh z \Rightarrow g'(z)=2\cosh z \Rightarrow g'(0)=2\cosh(0)=2\neq 0$$

$$h(z)=1-\cosh z \Rightarrow h'(z)=-\sinh z \Rightarrow h''(z)=-\cosh z \Rightarrow h''(0)=-\cosh(0)=-1\neq 0$$

پس $z=0$ صفر مرتبه اول برای صورت کسر و صفر مرتبه دوم برای مخرج کسر است و با توجه به فرمول $m=1$ است:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=2[\frac{g'(0)}{h''(0)}]=\frac{2\times 2}{-1}=-4$$

تحلیلی بودن یا تکین در بی‌نهایت

اگر بخواهیم رفتار تابع f را در بی‌نهایت بررسی کنیم، می‌توانیم $z=\frac{1}{w}$ قرار دهیم و تابع $f(z)=f(\frac{1}{w})$ را حساب کنیم و رفتار تابع $f(\frac{1}{w})$ را در $w=0$ بررسی کنیم. اگر در $w=0$ تابع $f(\frac{1}{w})$ تکین داشته باشد، می‌گوییم $f(z)$ در بی‌نهایت تکین دارد. مثلاً تابع $f(z)=\frac{1}{z^2}$ در ∞ تحلیلی است، چون $f(\frac{1}{w})=w^2$ و به ازای $w=0$ این تابع برابر صفر است و همچنین تابع $f(z)=z^3$ در ∞ قطب مرتبه سوم دارد، چون $f(\frac{1}{w^3})=\frac{1}{w^3}$ در $w=0$ قطب مرتبه سوم دارد.

مانده در بی‌نهایت

به همین ترتیب برای محاسبه مانده $f(z)$ در $z=\infty$ قرار می‌دهیم $w=\frac{1}{z}$ و مانده عبارت $-\frac{f(\frac{1}{w})}{w^2}$ را در $z=0$ حساب می‌کنیم. این مقدار در واقع همان مانند $f(z)$ در ∞ است.

نکته۱۷: اگر مانده تابع $f(z)$ در نقاط تکین آن را با هم جمع کنیم برابر «منفی مانده تابع f در بی‌نهایت» می‌شود. در واقع مجموع مانده‌های تابع $f(z)$ در نقاط تکین آن و مانده این تابع در $z=\infty$ برابر صفر است.

$$\sum \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=-[\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)]$$

به دست آوردن مقدار بعضی از سری‌ها با کمک گرفتن از روش مانده‌ها

در پایان صحبت مانده‌ها به نوع دیگری از مسائل که با کمک مانده قابل حل است، اشاره می‌کنیم. اگر $f(z)$ یک تابع چنـد جملـه‌ای و حـداقل از درجـه ۲ باشد، آنگاه تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi\,[\text{مجموع مانده‌های تابع } (\cot g\pi z)f(z) \text{ در قطبهای } f(z)]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \pi\,[\text{مجموع مانده‌های تابع } (\cot g\pi z)f(z) \text{ در قطبهای } f(z)]$$

مثال۴۵: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ به روش مانده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه $f(z)=\frac{1}{z^2}$، لذا باید مانده تابع $\frac{1}{z^2}(\cot g\pi z)$ را در نقطه $z=0$ حساب کنیم:

بهترین راه نوشتن بسط لورن تابع $\cot g\pi z$ است:

$$\frac{1}{z^2}(\cot g\pi z)=\frac{1}{z^2}[\frac{1}{\pi z}-\frac{\pi z}{3}-\frac{(\pi z)^3}{45}-\cdots]$$

به راحتی معلوم است ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $-\frac{\pi}{3}$ است، یعنی داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\pi(-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi^2}{3}$$

اما دقت کنید چون بازه سیگما از $n=1$ تا $n=+\infty$ می‌باشد، لذا عبارت فوق باید نصف شود، یعنی داریم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{3})=\frac{\pi^2}{6}$$

تست‌های طبقه بندی شده

۱ـ قطب‌های تابع $f(z)=\frac{z}{\sinh z\cosh z}$ عبارتند از: (برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{k\pi}{2}j$ و k عدد صحیح و غیر صفر
۲) $\frac{k\pi}{2}j$ و k عدد صحیح
۳) $k\pi j$ و k عدد صحیح و غیر صفر
۴) $k\pi j$ و k عدد صحیح

۲ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n(z+1)}$ عبارتست از: (برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $x>0$
۲) $x>+1$
۳) $x>-2$
۴) $x>-1$

۳ـ هرگاه $f(z)=\frac{\cos z-1}{z^4}$ ، در اینصورت $z_0=0$ قطب f با کدام مرتبه است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) فاقد قطب

۴ـ اگر $f(z)=\frac{1}{4-3z}$، آنگاه سری تیلور آن را حول نقطه $a=(1+i)$ بنویسید و ناحیه همگرائی آن را در صفحه z تعیین کنید.

(برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n[z-(1+i)]^n$، ناحیه همگرائی $|z-(1+i)|<\frac{3}{10}$
۲) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[z-(1+i)]^n$، ناحیه همگرائی $|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$
۳) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$، ناحیه همگرائی $|z-(1+i)|<\frac{3}{\sqrt{10}}$
۴) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$، ناحیه همگرائی $|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

۵ـ مانده تابع $e^{zt}\tan z$ در قطب $z=\frac{3\pi}{2}$ عبارت است از: (کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{\frac{3t}{2}\pi}$
۲) $e^{-\frac{3t}{2}\pi}$
۳) $e^{(j-\frac{3t}{2})\pi}$
۴) $e^{(j+\frac{3t}{2})\pi}$

۶ـ دنباله همگرای ... ,z_1,z_2 را که در آن $z_n=(1-\frac{3}{n})+j(2+\frac{4}{n})$ است؛ در نظر می‌گیریم. اگر c حد دنباله باشد، تعداد جملات دنباله که خارج از ناحیه $|z_n-c|<0/01$ می‌باشند کدام است؟ $(j=\sqrt{-1})$ (برق ـ سراسری ۸۰)

۱) ۴۰۱
۲) ۵۰۱
۳) ۴۰۰
۴) ۵۰۰

۷ـ تعداد نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z)=\frac{Ln(3+z)}{(z^2+2)\sin z}$ (شاخه اصلی لگاریتم مورد نظر است) درون مرز $|z|=2$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بیشمار

۸ـ برای تابع $f(z)=z^{10}e^{-\frac{1}{z^2}}$، نقطه $z_0=0$ چگونه نقطه ایست؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) نقطه عادی
۲) تکین اساسی
۳) قطب مرتبه ۱۰
۴) تکین برداشتی

۹ـ بسط سری Laurent برای تابع $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}$ حول نقطهٔ $z=0$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots$
۲) $\frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\frac{z^3}{162}+\cdots$
۳) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{5}z^3+\cdots$
۴) $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2-\frac{40}{81}z^3+\cdots$

۱۰ـ تابع $f(z)=\dfrac{z^{۶}}{(z^{۲}-۹)^{۲}\exp(\frac{۱}{z-۳})}$ داده شده است. در خصوص مرتبه، قطب و نقطه ویژه اساسی و مرتبه صفر، کدام عبارت صحیح است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $z=۳$ نقطه ویژه اساسی، و $z=-۳$ قطب مرتبه دوم تابع
۲) $z=۰$ صفر مرتبه ۷، و $z=۳$ قطب ساده تابع
۳) $z=-۳$ نقطه ویژه اساسی، و $z=۳$ قطب مرتبه ساده
۴) $z=۰$ صفر مرتبه ۷، و $z=۳$ قطب مرتبه دوم تابع و این تابع نقطه ویژه اساسی ندارد.

۱۱ـ مانده $f(z)=\dfrac{z^{۲}-۲z}{(z+۱)^{۲}(z^{۲}+۴)}$ در قطب $z=-۲i$ خواهد شد:

(مهندسی هوا و فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $\dfrac{۱+i}{۴+۳i}$　۲) $\dfrac{۱-i}{۴+۳i}$　۳) $\dfrac{۱-i}{۴-۳i}$　۴) $\dfrac{۱+i}{۴-۳i}$

۱۲ـ قرص همگرایی سری مختلط $\sum\dfrac{۳^{n}}{n^{۲}}(z-i)^{n}$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\{z:|z-i|<۱\}$　۲) $\{z:|z-i|<\frac{۱}{۳}\}$　۳) $\{z:|z-i|<۳\}$　۴) تمام صفحه مختلط

۱۳ـ ناحیه همگرایی سری $(\dfrac{۱}{z-۱})\sum_{n=۰}^{\infty}(-\dfrac{۲}{z-۱})^{n}$ کدام است؟

(برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $|z-۱|<۲$　۲) $|z-۱|>۲$　۳) $۱<|z|<۳$　۴) $z-۱>۲$ یا $z-۱<-۲$

۱۴ـ سری $\dfrac{z}{۱}+\dfrac{z^{۲}}{۲}+\dfrac{z^{۳}}{۳}+\cdots$ با شرط $|z|<۱$ نمایش کدام تابع است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\dfrac{۱}{(۱-z)^{۲}}$　۲) $\dfrac{z}{۱-z}$　۳) $-\mathrm{Ln}(۱-z)$　۴) $\mathrm{Ln}(۱-z)$

۱۵ـ مطلوب است سری تیلور $f(z)=\dfrac{۱}{۱-z}$ در همسایگی نقطه $z_{۰}=۲i$.

(مکانیک «کلیه گرایشها» ـ آزاد ۸۱)

۱) $\dfrac{۱}{۱-z}=\sum_{k=۰}^{\infty}\dfrac{۱}{(۱-۲i)^{k+۱}}(z-۲i)^{k}$

۲) $\dfrac{۱}{۱-z}=\sum_{k=۰}^{\infty}\dfrac{۱}{(۱-۲i)^{k}}(z-۲i)^{k+۱}$

۳) $\dfrac{۱}{۱-z}=\sum_{k=۰}^{\infty}\dfrac{۱}{(۱-۲i)^{k-۱}}(z-۲i)^{k}$

۴) $\dfrac{۱}{۱-z}=\sum_{k=۰}^{\infty}\dfrac{۱}{(۱-۲i)^{k}}(z-۲i)^{k-۱}$

۱۶ـ ماندهٔ تابع $f(x)=\dfrac{e^{\frac{۱}{z}}}{۱-z}$ در نقطهٔ منفرد $z=۰$ کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱　۲) e　۳) $e^{-۱}$　۴) $e-۱$

۱۷ـ کدام گزینه، بسط سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{۲z-۳}{z^{۲}-۳z+۲}$ در همسایگی نقطهٔ منفرد $z=۲$ است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $\dfrac{۱}{z-۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(z-۲)^{n+۱}$

۲) $\dfrac{۱}{z-۲}+\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}(z-۲)^{n}$

۳) $\dfrac{۱}{z-۱}+\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}(z-۲)^{n+۱}$

۴) $\cdots+\dfrac{۱}{(z-۲)^{۲}}+\dfrac{۱}{z-۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(z-۲)^{n+۱}$

۱۸ـ قلمرو همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z+i)^{n}}$ عبارتست از :

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $|z+i|>۱$　۲) $|z+i|<۱$　۳) $|z+i|>e$　۴) همه‌جا ، غیر از نقطه $z=-i$

۱۹ـ جملهٔ عمومی سری مک‌لوران تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{1-\cos z}{z^2} & , z\neq 0\\ \frac{1}{2} & , z=0\end{cases}$ ، که در آن $z=x+iy$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$ ۲) $(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ ۳) $(-1)^{k}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$ ۴) $(-1)^{k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

۲۰ـ قلمرو همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ عبارتست از : (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) $0<|z+1|<1$ ۲) $1<|z+1|<2$ ۳) C (همه جا همگرا) ۴) تهی (همه جا واگرا)

۲۱ـ اگر $f(z)=\frac{1}{1-z^4}$ماندهٔ $f(z)$ در $z=1$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۲۲ـ $z=0$ برای تابع $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$ چه نوع نقطهٔ تکین است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱)اساسی ۲) قطب مرتبه اول ۳) قابل رفع ۴) قطب مرتبه دوم

۲۳ـ اگر بدانیم که برای $|z|<1$ داریم: $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots$ سری لوران $\frac{1}{z^2}$ برای $|z+1|<1$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots$ ۲) $1+2(z-1)+3(z-1)^2+4(z-1)^3+\cdots$

۳) $1+(z+1)+(z+1)^2+(z+1)^3+\cdots$ ۴) $1+2(z+1)+3(z+1)^2+4(z+1)^3+\cdots$

۲۴ـ دو جملهٔ اول در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیهٔ $|z+1|>2$ عبارت است از: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}$ ۳) $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{2}{(z+1)^3}$ ۴) $\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^2}$

۲۵ـ مانده تابع $z^2e^{\frac{1}{z+1}}$ در نقطهٔ تکین آن کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{7}{6}$

۲۶ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{n}{z^2}}$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $x<0$ ۲) $y<0$ ۳) $xy<0$ ۴) $xy>0$

۲۷ـ سری لوران $\frac{1}{z-4}$ در ناحیه $|z|>4$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n z^{-n+1}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{z})^{n+1}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{z^n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}z^{-n}$

۲۸ـ سری لوران تابع $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$، در ناحیه $|z|>0$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ ۳) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ ۴) $\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{|n|!z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$

۲۹ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{i(\frac{n}{z+1})}$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $x>-1$ ۲) $y<0$ ۳) $y>0$ ۴) $1+x>y$

۳۰ـ در تابع مختلط $f(z)=z^{2}e^{\frac{1}{z}}$، نوع ویژگی (تکینی) تابع در نقطه $z=0$ چیست و مانده تابع در این نقطه ویژه (تکین) چند است؟ (برق ـ سراسری ۸۳)

۱) قطب ساده و صفر
۲) قطب ساده و $\frac{1}{6}$
۳) نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه بی‌نهایت) و $-\frac{1}{6}$
۴) نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه بی‌نهایت) و $\frac{1}{6}$

۳۱ـ ناحیهٔ همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z}{2z+1}\right)^{n}$ در صفحهٔ مختلط z کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\operatorname{Re}(z)>-\frac{1}{2}$
۲) $\operatorname{Re}(z)<-\frac{1}{4}$
۳) $\operatorname{Re}(z)>-\frac{1}{4}$
۴) $\operatorname{Re}(z)<-\frac{1}{2}$

۳۲ـ مانده تابع $f(z)=\frac{\cos z}{z^{2n+1}}$ در نقطه صفر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{(2n)!}$
۲) $\frac{1}{(2n+1)!}$
۳) $\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$
۴) $\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$

۳۳ـ برای تابع $\frac{\sinh z}{z^{4}}$ مرتبه قطب و مانده تابع در مبدأ مختصات کدام‌اند؟ (مهندسی مواد ـ سال ۸۳)

۱) مرتبه ۲، مانده $\frac{1}{3}$
۲) مرتبه ۳، مانده $\frac{1}{2}$
۳) مرتبه ۳، مانده $\frac{1}{6}$
۴) مرتبه ۲، مانده $\frac{1}{6}$

۳۴ـ ماندهٔ تابع $f(z)=z\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$ در نقطه $z=1$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $\cos 1$
۲) $\cos 1+\frac{\sin 1}{2}$
۳) $\frac{2\cos 1-\sin 1}{2}$
۴) $-\frac{\sin 1}{2}$

۳۵ـ سری لوران $\frac{2}{(z+1)(z+3)}$ در ناحیه $1<|z|<3$ عبارتست از: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{n}}{3^{n}}$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{n}}{3^{n+1}}$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}3^{n}}{z^{n+1}}$
۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}3^{n}}{z^{n}}$

۳۶ـ نقاط تکین و نوع آنرا برای تابع $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ تعیین کنید؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) قطب ساده در $z=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\dots)$ نقطه تکین برداشتی $z=0$
۲) قطب ساده در $z=\frac{1}{n\pi}$ نقطه تکین برداشتی $z=0$ $(n=\pm1,\pm2,\dots)$
۳) نقطه تکین اساسی در $z=0$ و قطب‌های ساده در $z=\frac{1}{2n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\dots)$
۴) قطب‌های ساده در $z=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\dots)$ و نقطهٔ تکین غیر تنها در $z=0$

۳۷ـ مشتق nام تابع $f(z)=\frac{ez-e^{z}}{(z-1)^{2}}$ را در نقطهٔ $z=1$ به دست آورید؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۴)

۱) $f^{(n)}(1)=0$
۲) $f^{(n)}(1)=\frac{e}{n(n+1)}$
۳) $f^{(n)}(1)=-\frac{e}{(n+1)(n+2)}$
۴) $f^{(n)}(1)=\frac{1}{n(n+1)}$

۳۸ـ ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $1<|z-1|<4$ برابر است با: (ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{5}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{5}$

۳۹ـ بسط لوران تابع $f(z)=\frac{۱}{z}$ حول نقطه $z=۱$ کدام است؟ (مهندسی هوا و فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{(z-۱)^n}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}(z-۱)^n$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}(z-۱)^n$ ۴) $\frac{۱}{z-۱}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(z-۱)^n}$

۴۰ـ شعاع همگرایی بسط تابع $f(z)=\frac{۱}{(z-i)(z+۱)(z+۲i)}$ حول نقطه $z_\circ=۱$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۴۱ـ در بسط لوران مقدار اصلی $(۱+z)^{\frac{۱}{z}}$ حول ∘، ضریب $z^۲$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ∘ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۱e}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۳e}{۲۴}$

۴۲ـ مانده‌ی تابع $f(z)=e^z\sinh\frac{۱}{z}$ حول $z=\circ$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\sinh ۱$ ۲) $\sinh ۱$ ۳) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)!(۲n+۱)!}$ ۴) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)!}$

۴۳ـ تابع $f(z)=e^{tg\frac{۱}{z}}$ در نقطه $z_\circ=\circ$ دارای چه نوع تکین است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) قطب ۲) تنهای برداشتی ۳) تنهای اساسی ۴) غیرتنها

۴۴ـ تابع $f(z)=\frac{\sinh z}{\sin z}$ را در نظر می‌گیریم، ماندهٔ این تابع در نقطهٔ $z=\circ$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱- ۲) i ۳) ۱ ۴) صفر

۴۵ـ دو جمله‌ی اول غیر صفر بسط ماکلورن تابع $f(z)=\sin(\sin z)$ در صفحهٔ مختلط عبارت است از: (برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $z-\frac{z^۳}{۳}$ ۲) $z+\frac{z^۳}{۳!}$ ۳) $z+\frac{z^۳}{۳}$ ۴) $z+\frac{z^۳}{۲!}$

۴۶ـ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(z)=\frac{۱-\cos z}{z^۳} \quad \text{و} \quad z\neq\circ \ (\text{متغیر مختلط})$$

کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $z=\circ$ قطب ساده تابع f است و مانده f در نقطه صفر برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

۲) $z=\circ$ قطب ساده تابع f است و مانده f در نقطه صفر برابر با ۱ است.

۳) $z=\circ$ قطب مرتبه دو تابع f است و مانده f در نقطه صفر برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

۴) $z=\circ$ قطب مرتبه سه تابع f است و مانده f در نقطه صفر برابر با ۱ است.

۴۷ـ در تابع $f(z)=\frac{۱}{z(e^z-۱)}$، مانده تابع در $z=\circ$ عبارت است از: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱- ۳) $+\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱+

۴۸ـ تابع $f(z)=\sec(\frac{۱}{z-۱})$ از متغیر مختلط z را در نظر می‌گیریم. در مورد نقاط تکین (singularity) و قطب‌های تابع کدام عبارت درست است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) بی‌نهایت قطب مکرر دارد. ۲) $z=۱$ تنها نقطه تکین تابع است.

۳) فقط یک نقطه تکین اساسی دارد. ۴) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطه تکین اساسی دارد.

۴۹ـ مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{1-\cos z}$ در نقطه تکین تنهای $z=0$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۰ـ اگر $z=0$ نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ باشد و $f'(z)=\dots+\dfrac{a_{-2}}{z^2}+\dfrac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2\dots$، آنگاه با چه شرطی این نقطه تکـین تنهـا خواهـد بود؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $a_k\neq 0$ به ازای همه $k<0$ صحیح
۲) $a_m\neq 0$ به ازای لااقل یک m صحیح منفی
۳) $a_k=0$ به ازای برخی kهای صحیح مثبت و $a_{-1}\neq 0$ و $a_{-2}\neq 0$
۴) فقط $a_{-1}=0$ و $a_m\neq 0$ به ازای لااقل یک m صحیح منفی

۵۱ـ فرض کنیم $f(z)=\dfrac{\sinh z}{1-\cosh z}$ ماندۀ این تابع در نقطه $z=0$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵ و مواد سراسری ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۲

۵۲ـ اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $g(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ و $f(z_0)\neq 0$ آنگاه: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) g در z_0 تحلیلی است.
۲) z_0 یک نقطه تکین اساسی g است.
۳) z_0 یک نقطه تکین برداشتنی g است.
۴) z_0 یک قطب ساده g است.

۵۳ـ کدام یک از سری‌های زیر بسط لورانت تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ حول نقطه صفر در مجموعه $\{z\in C: 0<|z|<1\}$ است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+2}})z^n$
۲) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+2}})z^n$
۳) $\dfrac{1}{2z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+2}})z^n$
۴) $\dfrac{1}{2z^2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+2}})z^n$

۵۴ـ در سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^{nz}}{n+1}$، $0<a<1$ ثابت است. در این صورت ناحیه همگرایی سری عبارت است از: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\mathrm{Re}(z)<0$ ۲) $\mathrm{Im}(z)<0$ ۳) $\mathrm{Re}(z)>0$ ۴) $\mathrm{Im}(z)>0$

۵۵ـ تابع $f(z)=\mathrm{cosec}(\dfrac{1}{z+1})$ از متغیر مختلط z را در نظر می‌گیریم. در مورد نقاط تکین (singular) و قطب‌های تابع کـدام عبـارت درسـت است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطۀ تکین اساسی دارد.
۲) بی‌نهایت قطب مکرر دارد.
۳) فقط یک نقطه تکین اساسی دارد و قطب ندارد.
۴) $z=1$ تنها نقطه تکین تابع است.

۵۶ـ اگر سری لوران تابع f به صورت $|z|>1$, $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ باشد، آنگاه مقدار a_2 و b_2 کدامند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $b_2=0$ و $a_2=-1$ ۲) $b_2=0$ و $a_2=0$ ۳) $b_2=1$ و $a_2=1$ ۴) $b_2=1$ و $a_2=0$

۵۷ـ ناحیۀ همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z+i}{z-3i})^n$ در صفحۀ مختلط کدام است $(i=\sqrt{-1})$ ؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $x^2+(y-i)^2<4$ ۲) $x^2+(y-i)^2>4$ ۳) $\mathrm{Im}(z)>1$ ۴) $\mathrm{Im}(z)<1$

۵۸ـ حد تابع $f(z)=z-e^z$ وقتی z به بی‌نهایت میل کند، کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\infty$ ۲) ۰ ۳) وجود ندارد. ۴) ∞

۵۹ـ بخش اصلی تابع $f(z)=\dfrac{e^z\cos z}{z^3}$ حول $z=0$ و باقیمانده f در $z=0$ کدامند؟ (مهندسی هوا و فضا ـ سراسری ۸۶)

۱) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}$ و ۰
۲) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$ و ۱
۳) $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}$ و $-\dfrac{1}{2}$
۴) $-\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}$ و $\dfrac{1}{2}$

۶۰ـ فرض کنیم $F(s)=L\{f\}$ (تبدیل لاپلاس) و R_0 عدد مثبت ثابتی باشد و $F(s)=\frac{a_{-1}}{s}+\frac{a_{-2}}{s^2}+\dots, |s|=R_0$، با گرفتن تبدیل عکس لاپلاس جمله به جمله از طرفین این تساوی، سری تابع $f(z)$ در کدام ناحیه از صفحه z تحلیلی است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) در ناحیه ۲) در تمام صفحه z ۳) در ناحیه $|z|>R_0$ ۴) در ناحیه $|z|\le R_0$

۶۱ـ اگر $f(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & , \quad z\neq 0\\ 1 & , \quad z=0\end{cases}$، آنگاه مقدار $f^{(2n)}(0)$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2n+1}$ ۲) $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ۳) $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ ۴) $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n)}$

۶۲ـ سری لوران تابع $f(z)=\frac{z}{z-k}$ در ناحیه $|z|>|k|$ (k ثابت) به توان‌های z کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $1+\frac{k}{z}+\frac{k^2}{z^2}+\dots+(\frac{k}{z})^n+\dots$ ۲) $\frac{z}{k}+1+\frac{k}{z}+(\frac{k}{z})^2+\dots+(\frac{k}{z})^n+\dots$

۳) $z+1+\frac{k}{z}+\frac{k^2}{z^2}+\dots+(\frac{k}{z})^n+\dots$ ۴) $\frac{1}{z}+1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\dots+(\frac{z}{k})^n+\dots$

۶۳ـ ضریب جمله $(z-\frac{i}{2})^3$ در بسط تیلور تابع $f(z)=\sinh(2z-i)$ عبارت است از: (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۴ـ ضریب جمله $(z+\pi i)^2$ در بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^2}$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{1}{4!}$ ۲) $\frac{\pi i}{4!}$ ۳) $\frac{1}{4!}$ ۴) $-\frac{\pi i}{4!}$

۶۵ـ اگر یک سری لوران تابع f به صورت $2<|z|<3$ ، $f(z)=\tan z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$ باشد، آنگاه مقدار b_2 چقدر است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\pi$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) π

۶۶ـ ماندهٔ تابع $f(z)=\frac{ze^z}{(z-a)^3}$، $a\neq 0$، نسبت به نقطهٔ تکین کدام است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{ae^a}{2}$ ۲) $(1+a)e^a$ ۳) $(1+\frac{a}{2})e^a$ ۴) $(\frac{1}{2}+\frac{a}{6})e^a$

۶۷ـ اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ برابر با R، $0<R<\infty$ باشد شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{nk}$ کدام است؟ $(k\in N)$

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) k^R ۲) $R^{\frac{1}{k}}$ ۳) R ۴) R^k

۶۸ـ اگر $f(z)$ یک قطب مرتبه m در z_0 داشته باشد و $P(z)$ چند جمله‌ای درجه $n\ge 1$ باشد کدام گزاره صحیح است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $P[f(z)]$ در z_0 قطب مرتبه m دارد. ۲) $P[f(z)]$ در z_0 قطب مرتبه mn دارد.

۳) $P[f(z)]$ در z_0 قطب ندارد اگر $n>m$ باشد. ۴) $P[f(z)]$ در z_0 قطب مرتبه m دارد اگر $m>n$ باشد.

۶۹ـ مانده تابع $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ در نقطه تکین $z_0=-1$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{-17}{54}$ ۲) $\frac{-17}{54e}$ ۳) $\frac{17}{54}$ ۴) $\frac{17}{54e}$

۷۰ـ بسط لوران تابع $f(z)=\frac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}$ به ازای $2<|z|<+\infty$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^{n+1}}$
۲) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}$
۳) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^n}$
۴) $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{z^{n+1}}$

۷۱ـ فرض کنید $P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$ یک چند جمله‌ای از درجه $n\geq 2$ باشد. کدام گزینه در مورد P درست است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) P در بی‌نهایت دارای قطب مرتبه n است.
۲) P در بی‌نهایت دارای نقطهٔ تکین اساسی است.
۳) برد P می‌تواند برابر با C نباشد.
۴) P می‌تواند یک نگاشت یک به یک باشد.

۷۲ـ فرض کنید Ω یک مجموعه باز و همبند باشد و $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعضای متمایز Ω باشد که به $z_0\in\Omega$ همگراست. اگر f و g دو تابع تحلیلی بر Ω باشند که در هیچ نقطه از Ω برابر با صفر نیستند و $\frac{f'}{f}(z_n)=\frac{g'}{g}(z_n)$، کدام گزینه صحیح است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) f و g با هم برابرند.
۲) $f-g$ ثابت است.
۳) fg ثابت است.
۴) f مضربی از g

۷۳ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-i}{z-1})^n$ در صفحهٔ مختلط کدام است $(i=\sqrt{-1})$؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)

۱) $y>x$
۲) $y>x$
۳) $|z|<1$
۴) $|z|>1$

۷۴ـ نقاط تکین $f(z)=\cot g(\pi z)$ عبارتند از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) 0
۲) $0,\pm\frac{1}{\pi},\pm\frac{2}{\pi},\cdots$
۳) $0,\pm1,\pm2,\dots$
۴) $0,\pm1,\pm\frac{1}{2},\cdots$

۷۵ـ مانده تابع $(z-1)^5\cos\frac{1}{z-1}$ در $z=1$ برابر است با: (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی داروسازی ـ سراسری ۸۷)

۱) -1
۲) $-\frac{1}{6!}$
۳) 0
۴) $\frac{1}{2!}$

۷۶ـ مانده تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) 1

۷۷ـ مبدأ مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$ دارد و مانده‌ی تابع در این نقطه چیست؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) قطب ساده و $Res(0)=\frac{1}{2}$
۲) قطب مرتبه دوم و $Res(0)=1$
۳) قطب ساده و $Res(0)=1$
۴) نقطه تکین برداشتنی و $Res(0)=1$

۷۸ـ اگر $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$، آنگاه سری لوران تابع f در ناحیه $1<|z|<2$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}$
۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$

۷۹ـ تابع $f(z)=\sin\frac{1}{z}-\cos\frac{1}{z}$: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) در $z=0$ تکینی اساسی دارد.
۲) در $z=0$ قطب دارد.
۳) در $z=0$ تکینی برداشتنی دارد.
۴) در همسایگی سفته (محذوف) $z=0$ کراندار است.

۸۰ـ سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{z+1}}$، که در آن z یک عدد مختلط است: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) به ازای هرعدد موهومی محض z همگرا است.
۲) به ازای هر عدد موهومی محض z واگرا است.
۳) به ازای هر عدد حقیقی z همگرا است.
۴) به ازای هر عدد حقیقی z واگرا است.

۸۱ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} n^{n-2}(\frac{z}{3})^{n!}$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۰ ۴) ∞

۸۲ـ بسط لوران $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ در $z=1$ کدام یک از عبارات زیر است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$

۲) $e^2\{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}+\frac{2e^2}{3}+\frac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

۳) $\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{3e^2}{z-1}+\frac{3e^2}{4}+4e^2(z-1)+\cdots$

۴) $e^2\{\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{3}(z-1)+\cdots\}$

۸۳ـ فرض کنید $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $w\neq 0$ یک عدد مختلط و V همسایگی صفر باشد. در این صورت معادله‌ی $f(z)=w$ به ازای هر w:
(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) و هر V فقط یک جواب در V دارد.
۲) و هر V تعداد نامتناهی در V جواب دارد.
۳) و هر V هیچ جوابی در V ندارد.
۴) یک V یافت می‌شود که در V فقط یک جواب دارد.

۸۴ـ در بسط $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ در ناحیه $0<|z-1|<3$، ضریب جمله $(z-1)^2$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{-1}{27}$ ۲) $\frac{2}{27}$ ۳) $\frac{2}{81}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۸۵ـ شعاع همگرایی سری تیلور تابع $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z-2)(z-3)}$ حول نقطه $z=i$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{3}$

۸۶ـ اگر سری لورانت تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ به صورت $f(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ بدست آمده باشد، دامنه همگرایی دقیق سری عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $0<|z|$ ۲) $1<|z|$ ۳) $|z|>2$ ۴) $1<|z|<2$

۸۷ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)^n(\frac{z-i}{2})^{n(n+1)}$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ∞

۸۸ـ فرض کنید z_0 نقطه تکین اساسی تابع f باشد و $D'(z_0,\delta)$ قرص باز سُفته‌ای به مرکز z_0 و شعاع $\delta>0$ باشد. در این صورت بستار $f(D'(z_0,\delta))$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) C ۲) R
۳) قرصی بسته به مرکز مبداء مختصات ۴) مجموعه‌ای فشرده در صفحه‌ی مختلط که به f وابسته است.

۸۹ـ ماندهٔ تابع $F(z)=\frac{e^{i\pi z}}{(z-1)^3}$ در نقطه تکینی (singularity) آن برابر است با:

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\pi^2}{2}$ ۲) $\frac{i\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{-\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{-i\pi^2}{2}$

۹۰ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{3z+4}{3z+1})^n$، عبارت است از: (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $Re(z)<-\frac{1}{3}$ ۲) $Re(z)<-\frac{5}{6}$ ۳) $Re(z)>-\frac{1}{3}$ ۴) $Re(z)>-1$

پاسخنامه تست‌های طبقه بندی شده

۱ـ گزینه «۱» $\sinh z\cosh z=0 \Rightarrow 2\sinh z\cosh z=0 \Rightarrow \sinh 2z=0 \Rightarrow 2z=k\pi j \Rightarrow z=\frac{k\pi j}{2}$

توجه شود که به ازای $k=0$ مقدار $z=0$ و در نتیجه مخرج $f(z)$ نیز برابر صفر خواهد بود اما چون صورت کسر نیز در این حالت صفر می‌شود باید حد را محاسبه نمود:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sinh z\cosh z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sinh 2z}=1$$

پس $z=0$ نقطه تکین برداشتنی تابع می‌باشد یعنی به ازای $k=0$ قطب نداریم.

۲ـ گزینه «۴» ابتدا شعاع همگرایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}\right|=e^{-1}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

حال برای به دست آوردن ناحیه همگرایی داریم:

$$|e^{-z}|<e \Rightarrow |e^{-x-iy}|<e \Rightarrow |e^{-x}||e^{-iy}|<e \xrightarrow{|e^{-iy}|=1} |e^{-x}|<e \Rightarrow e^{-x}<e \Rightarrow x>-1$$

۳ـ گزینه «۲»

$$C=\lim_{z\to 0} z^m\left(\frac{\cos z-1}{z^4}\right)=\lim_{z\to 0} z^m\frac{\frac{-z^2}{2}}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{-z^m}{2z^2}\xrightarrow{m=2} C=-\frac{1}{2}$$

لازم به یادآوری است مقدار m که به ازای آن برای اولین بار حد متناهی شود، مرتبه قطب است.

۴ـ گزینه «۴»

روش اول: با فرض $z-(1+i)=u$ می‌توانیم بسط تیلور تابع $f[u+(1+i)]$ را در $u=0$ بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{4-3z}=f(u+(1+i))=\frac{1}{4-3(u+1+i)}=\frac{1}{1-3i-3u}=\frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3u}{1-3i}}$$

بسط تیلور $\frac{1}{1-z}$ حول $z=0$ برابر $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ است، لذا داریم:

$$f(z)=\frac{1}{1-3i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^n}.u^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1-i)^n]^n$$

اما شعاع همگرائی برابر فاصله $1+i$ از نقطه $z=\frac{4}{3}$ است، یعنی $\frac{\sqrt{10}}{3}$ است.

روش دوم: با توجه به تعریف بسط تیلور حول نقطه a داریم:

$$f(z)=f(a)+(z-a)\frac{f'(a)}{1!}+\cdots$$

از طرفی برای این تست $f(a)$ یا همان مقدار $f(1+i)$ برابر است با:

$$f(1+i)=\frac{1}{4-3(1+i)}=\frac{1}{1-3i}$$

یعنی به ازای $n=0$ باید مقدار $\frac{1}{1-3i}$ در گزینه‌ها حاصل گردد که این شرایط را فقط گزینه‌های ۳ و ۴ دارا هستند از طرفی شعاع همگرائی برابر $\frac{\sqrt{10}}{3}$ است پس گزینه ۳ نیز نمی‌تواند صحیح باشد.

۵ـ گزینه «۴»

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z)=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)e^{zt}.\operatorname{tg}z=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos z}\times\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\sin z.e^{zt}=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z}\times\left(-e^{\frac{3\pi}{2}t}\right)$$

$$=-e^{\frac{3\pi}{2}t}=e^{i\pi}.e^{\frac{3\pi}{2}t}=e^{(i+\frac{3t}{2})\pi}$$

۶ـ گزینه «۴»

$$C=\lim_{n\to\infty} z_n=1+2i$$

$$|z_n-C|<0/01 \Rightarrow \left|(1-\frac{3}{n})+i(2+\frac{4}{n})-(1+2i)\right|\ge 0/01$$

$$\Rightarrow \left|-\frac{3}{n}+i\frac{4}{n}\right|\ge 0/01 \Rightarrow \sqrt{(-\frac{3}{n})^2+(\frac{4}{n})^2}\ge 0/01 \Rightarrow \frac{5}{n}\ge 0/01 \Rightarrow n\le 500$$

۷ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases}\sin z = 0 \Rightarrow z = 0\ ,\ \pm\pi\ ,\ \pm 2\pi\ ,\ .... \\ z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{2}\end{cases}$$

فقط $z = 0$ درون ناحیه قرار دارد

هر دو نقطه درون ناحیه هستند

توجه شود $\mathrm{Ln}(3+z)$ در ناحیه $|z| = 2$ تحلیلی می‌باشد. و ۳ قطب در ناحیه مزبور داریم.

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۲» $f(z) = z^{10}(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{4!z^8} - \frac{1}{5!z^{10}} + \frac{1}{6!z^{12}} - \cdots) = z^{10} - z^8 + \frac{z^6}{2!} - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!z^2}$

چون بسط لوران شامل جمله‌های نامتناهی از توان‌های منفی z است لذا $z = 0$ نقطه تکین اساسی است.

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۱»

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots) = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۱» $z = 3$ نقطه تکین اساسی می‌باشد و با توجه به رابطه $(z^2 - 9)^2 = (z-3)^2(z+3)^2$ ملاحظه می‌گردد $z = -3$ قطب مرتبه دوم می‌باشد. لازم به توضیح است در تابع $e^{\frac{1}{z - z_0}}$ همواره نقطه $z = z_0$ نقطه تکین اساسی تابع است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۱» $\underset{z=-2i}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \lim_{z \to -2i} (\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)}) = \frac{(-2i)^2 - 2(-2i)}{(-2i+1)^2(-2i-2i)} = \frac{-4+4i}{-4i(-4+1-4i)} = \frac{-1-i}{-4-3i}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرائی را به دست می‌آوریم: $\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} |\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n}{n^3}}| = \lim_{n \to +\infty} [(\frac{n}{n+1})^3 \times \frac{3^{n+1}}{3^n}] = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3} \Rightarrow |z - i| < \frac{1}{3}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرائی را محاسبه می‌کنیم: $\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} |\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n}| = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$

برای به دست آوردن ناحیه همگرائی داریم: $\frac{1}{|z-1|} < \frac{1}{2} \Rightarrow |z-1| > 2$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۳» با توجه به بسط تیلور اشاره شده در متن درس سری فوق نمایش تابع $-\mathrm{Ln}(1-z)$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۱»

$$f(2i) = \frac{1}{1-2i}$$

با توجه به تعریف بسط تیلور حول نقطه $2i$ به ازای $k = 0$ هر کدام از گزینه‌ها که حاصل آن برابر $\frac{1}{1-2i}$ باشد، جواب است که ملاحظه می‌گردد این شرایط را فقط گزینه ۱ داراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ـ گزینه «۴»

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots \\ e^{\frac{1}{z}} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots)$$

لذا ضرایب $\frac{1}{z}$ پس از محاسبه و جمع ضرایب آن برابر است با: $\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e - 1$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{۱}{z-۲}+\frac{۱}{z-۱}=\frac{۱}{z-۲}+\frac{۱}{۱-(۲-z)}=\frac{۱}{z-۲}+\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(z-۲)^n$$

۱۸ـ گزینه «۳»

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin i(n+۱)}{\sin in}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sinh(n+۱)}{\sinh n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{(n+۱)}-e^{-(n+۱)}}{e^n-e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e-e^{n-۱}}{۱-e^{-۲n}}=e\Rightarrow R=\frac{۱}{e}$$

$$\left|\frac{۱}{z+i}\right|<\frac{۱}{e}\Rightarrow|z+i|>e$$

۱۹ـ گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{۱-\cos z}{z^۲}=\frac{\frac{z^۲}{۲!}-\frac{z^۴}{۴!}+\frac{z^۶}{۶!}-\cdots}{z^۲}=\frac{۱}{۲!}-\frac{z^۲}{۴!}+\frac{z^۴}{۶!}-\cdots$$

لذا جمله عمومی را می‌توان به فرم $\frac{(-۱)^{k-۱}.z^{۲k-۲}}{(۲k)!}$ نوشت.

۲۰ـ گزینه «۴» چون دو سری داریم باید جداگانه قلمرو همگرایی آنها را حساب کنیم:

$$\begin{cases}\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{i(n+۱)}}{e^{in}}\right|=۱\Rightarrow R=۱\Rightarrow\left|\frac{۱}{z+۱}\right|<۱\Rightarrow|z+۱|>۱\\[2ex]\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{i(n+۱)+\frac{۱}{۲}}}{e^{in+\frac{۱}{۲}}}\right|=۱\Rightarrow R=۱\Rightarrow|z+۱|<۱\end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد قلمرو همگرایی دو سری کاملاً نقض کننده یکدیگر می‌باشد، پس در مجموع سری واگراست.

۲۱ـ گزینه «۴»

$$\operatorname*{Res}_{z=۱}f(z)=\left.\frac{۱}{-۴z^۳}\right|_{z=۱}=-\frac{۱}{۴}$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$\lim_{z\to۰}z.\left(\frac{e^z-۱}{z^۲}\right)=\lim_{z\to۰}\frac{e^z-۱}{z}=\lim_{z\to۰}e^z=۱$$

۲۳ـ گزینه «۴»

$$\frac{۱}{z^۲}=\left[\frac{۱}{۱-(z+۱)}\right]^۲=[۱+(z+۱)+(z+۱)^۲+\cdots]^۲=۱+۲(z+۱)+۳(z+۱)^۲+۴(z+۱)^۳+\cdots$$

۲۴ـ گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{۱}{z^۲-۱}=\frac{۱}{(z+۱)(z-۱)}=\frac{۱}{z+۱}\left[\frac{۱}{z+۱-۲}\right]=\frac{۱}{z+۱}\left[\frac{۱}{z+۱}\left(\frac{۱}{۱-\frac{۲}{z+۱}}\right)\right]$$

$$=\frac{۱}{(z+۱)^۲}\left[۱+\frac{۲}{z+۱}+\frac{۴}{(z+۱)^۲}+\cdots\right]=\frac{۱}{(z+۱)^۲}+\frac{۲}{(z+۱)^۳}+\cdots$$

۲۵ـ گزینه «۱» بسط تیلور تابع $e^{\frac{۱}{z+۱}}$ را حول $z=-۱$ می‌نویسیم:

$$z^۲.e^{\frac{۱}{z+۱}}=(z+۱-۱)^۲e^{\frac{۱}{z+۱}}=[(z+۱)^۲-۲(z+۱)+۱]e^{\frac{۱}{z+۱}}=[(z+۱)^۲-۲(z+۱)+۱)]\times$$

$$\left[۱+\frac{۱}{z+۱}+\frac{۱}{۲!(z+۱)^۲}+\frac{۱}{۳!(z+۱)^۳}+\frac{۱}{۴!(z+۱)^۴}+\cdots\right]$$

ضریب $\frac{۱}{z+۱}$ مانده محسوب می‌گردد که ملاحظه می‌گردد برابر $\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۲!}-۱$ می‌باشد.

۲۶ـ گزینه «۳» شعاع همگرایی برابر یک است، لذا داریم:

$$|e^{\frac{i}{z^2}}|<1 \Rightarrow |e^{\frac{i\bar{z}^2}{|z|^4}}|<1 \Rightarrow e^{\frac{2xy}{|z|^4}}<1 \Rightarrow xy<0$$

۲۷ـ گزینه «۴»

$$|z|>4 \Rightarrow |\frac{4}{z}|<1$$

$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{z}} \Rightarrow \frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}$$

۲۸ـ گزینه «۲»

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\xrightarrow{z\to\frac{1}{z}}e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!z^n}$$

۲۹ـ گزینه «۲»

$$|e^{\frac{i}{z+1}}|<1=|e^{\frac{i(x+1)+y}{(x+1)^2+y^2}}|<1 \Rightarrow e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}}<1 \Rightarrow \frac{y}{(x+1)^2+y^2}<0 \Rightarrow y<0$$

۳۰ـ گزینه «۴»

$$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots)=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots$$

ملاحظه می‌گردد $z=0$ نقطه تکین اساسی تابع و مانده (همان ضریب $\frac{1}{z}$) برابر $\frac{1}{6}$ می‌باشد.

۳۱ـ گزینه «۳»

$$|\frac{2z}{2z+1}|<1 \Rightarrow |2z|<|2z+1| \Rightarrow 4x^2+4y^2<(2x+1)^2+4y^2 \Rightarrow 4x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{4}$$ یا $$Re(z)>-\frac{1}{4}$$

۳۲ـ گزینه «۴» $f(z)=\frac{\cos z}{z^{2n+1}}=\frac{1}{z^{2n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ لذا ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $\frac{(-1)^n}{(2n!)}$ می‌باشد.

۳۳ـ گزینه «۳»

$$\frac{\sinh z}{z^4}=\frac{z+\frac{z^3}{6}+\cdots}{z^4}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6z}+\cdots$$

ضریب $\frac{1}{z}$ مانده در $z=0$ را مشخص می‌کند که برابر $\frac{1}{6}$ است. همچنین ملاحظه می‌گردد قطب مرتبه سوم است.

۳۴ـ گزینه «۳» $z=1$ نقطه تکین اساسی تابع است:

$$f(z)=z\sin\frac{z}{z-1}=[(z-1)+1]\sin(1+\frac{1}{z-1})]=[(z-1)+1][\sin1.\cos\frac{1}{z-1}+\cos1.(\sin\frac{1}{z-1})]$$

$$=[(z-1)+1][\sin1.(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\cdots)+\cos1.(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-0)^3}+\cdots)]$$

ملاحظه می‌گردد مانده در $z=1$ و یا همان ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر $\cos1-\frac{\sin1}{2!}$ می‌باشد.

۳۵ـ گزینه «۲» ابتدا با استفاده از روش تجزیه کسرها تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2}{(1+z)(3+z)}=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{3+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-z)^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^n}{3^{n+1}}$$

۳۶ـ گزینه «۴» نقاط $z=\frac{1}{n\pi}$ همگی قطبهای ساده تابع هستند، و $z=0$ نقطه تکین غیر تنها می‌باشد.

۳۷ـ گزینه «۳» ابتدا بسط تابع را حول $z=1$ می‌نویسیم با فرض $z-1=u$ داریم:

$$f(z)=\frac{e(u+1)-e^{1+u}}{u^2}=\frac{e(1+u)-e.e^u}{u^2}=\frac{e(1+u)-e(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots)}{u^2}=-\frac{e}{2!}-\frac{e}{3!}u-\frac{eu^2}{4!}-\cdots-\frac{e}{(n+2)!}.u^n+\cdots$$

همان‌طور که می‌دانیم ضریب u^n برابر $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=-\frac{e}{(n+2)!}\Rightarrow f^{(n)}(1)=-\frac{e}{(n+1)(n+2)}$$

۳۸ـ گزینه «۱» با توجه به ناحیه داده شده باید توان‌های $(z-1)$ را ایجاد کنیم:

$$\frac{1}{z(z-5)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-5}\Rightarrow 1=A(z-5)+Bz\Rightarrow 1=(A+B)z-5A\Rightarrow A=-\frac{1}{5}\,,\,B=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{z(z-5)}=-\frac{1}{5}(\frac{1}{z})+\frac{1}{5}(\frac{1}{z-5})$$

حالا باید $\frac{1}{z}$ و $\frac{1}{z-5}$ را تغییر قیافه دهیم و آن‌ها را بر حسب توان‌های $(z-1)$ بسط دهیم:

$$-\frac{1}{5}(\frac{1}{z})=-\frac{1}{5}[(\frac{1}{z-1})(\frac{1}{1-(\frac{-1}{z-1})})]$$

در این حالت چون $1<|z-1|$، لذا $|\frac{1}{z-1}|<1$ و می‌توانیم از بسط استفاده کنیم:

$$-\frac{1}{5}[(\frac{1}{z-1})(\frac{1}{1+(\frac{1}{z-1})})]=-\frac{1}{5(z-1)}[1-\frac{1}{z-1}+(\frac{1}{z-1})^2+\cdots]$$

دقت کنید چون $z=5$ در ناحیه موردنظر قرار ندارد، لذا جمله $\frac{1}{z-1}$ در بسط $\frac{1}{z-5}$ تولید نمی‌شود، پس ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر $-\frac{1}{5}$ است.

۳۹ـ گزینه «۱» با فرض $z-1=u$ لذا داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{u+1}=\frac{1}{1-(-u)}$$

بسط مک‌لوران تابع را در $u=0$ می‌نویسیم:

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-u)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}$$

۴۰ـ گزینه «۳» شعاع همگرایی برای این تست را از رابطه روبرو محاسبه می‌کنیم:

$$\min_{z=i,-1,-2i}|z-z_0|=\min\{\sqrt{2},2,\sqrt{5}\}=\sqrt{2}$$

توضیح اینکه $z_0=1$ می‌باشد و کوتاهترین فاصله این نقطه از نقاط غیر تحلیلی i، -1 و $-2i$ شعاع همگرایی محسوب می‌گردد.

۴۱ـ گزینه «۳»

$$(1+z)^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{z}Ln(1+z)}=e^{\frac{1}{z}(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots)}=e^{(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\cdots)}=e.e^{-\frac{z}{2}}.e^{\frac{z^2}{3}}\ldots$$

دقت کنید، در توان‌های e به خاطر این جملات دیگر را ننوشتیم که بعد از جمله $e^{\frac{z^2}{3}}$، جملات دیگر عبارتی با درجه بیشتر از z^2 تولید می‌کنند و کاربردی در به دست آوردن ضریب z^2 که خواسته سئوال است، ندارد.

$$=e\times[1+(-\frac{z}{2})+\frac{1}{2!}(-\frac{z}{2})^2+\cdots][1+(\frac{z^2}{3})+\frac{1}{2!}(\frac{z^2}{3})^2+\cdots]\cdots=e(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2+\cdots)$$

ملاحظه می‌گردد ضریب z^2 برابر $\frac{11}{24}e$ می‌باشد.

۴۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $z=۰$ تکین اساسی تابع می‌باشد، لذا نوشتن بسط لوران بهترین روش حل تست است:

$$f(z)=e^{z}\sinh\frac{۱}{z}=(۱+z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!}+\frac{z^{۴}}{۴!}+\cdots)(\frac{۱}{z}+\frac{۱}{z^{۳}۳!}+\frac{۱}{z^{۵}۵!}+\frac{۱}{z^{۷}۷!}+\cdots)$$

مانده در $z=۰$ همان ضریب $\frac{۱}{z}$ است و با کمی دقت به راحتی معلوم است که $\frac{۱}{z}$ از ضرب ۱ از پرانتز اول در $\frac{۱}{z}$ از پرانتز دوم، $\frac{z^{۲}}{۲!}$ از پرانتز اول در $\frac{۱}{z^{۳}۳!}$ از پرانتز دوم، $\frac{z^{۴}}{۴!}$ از پرانتز اول در $\frac{۱}{z^{۵}۵!}$ از پرانتز دوم و ..... حاصل می‌شود، یعنی مانده در $\frac{۱}{z}$ به صورت زیر است:

$$z=۰ \text{ مانده در } =۱+\frac{۱}{۲!۳!}+\frac{۱}{۴!۵!}+\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)!(۲n+۱)!}$$

۴۳ـ گزینه «۴»

$$tg\frac{۱}{z}=\frac{\sin\frac{۱}{z}}{\cos\frac{۱}{z}}\Rightarrow\begin{cases}z=۰\\ \cos\frac{۱}{z}=۰\end{cases}$$

ریشه‌های معادله $\cos\frac{۱}{z}=۰$ به صورت $z=\pm\frac{۲}{\pi},\pm\frac{۲}{۳\pi},\pm\frac{۲}{۵\pi}$ می‌باشند و واضح است، تمام این نقاط تکین حول صفر انباشته می‌شوند و این یعنی $z=۰$ تکین غیر تنها (تکین انباشته) برای تابع می‌باشد.

۴۴ـ گزینه «۴» $z=۰$ قطب برداشتنی تابع است، پس حاصل مانده برابر صفر است. البته پاسخ جالب‌تر اینکه چون توابع $\sinh z$ و $\sin z$ هر دو فرد هستند، لذا $f(z)$ تابعی زوج است و این یعنی جمله $\frac{۱}{z}$ در بسط آن وجود ندارد و مانده صفر است.

۴۵ـ گزینه «۱» بسط تیلور تابع $\sin z$ را می‌نویسیم، دقت کنید در طرفین این بسط به جای تمام zها $\sin z$ قرار می‌دهیم.

$$\sin(\sin z)=\sin z-\frac{(\sin z)^{۳}}{۳!}+\frac{(\sin z)^{۵}}{۵!}-\cdots\Rightarrow(z-\frac{z^{۳}}{۳!}+\cdots)-\frac{(z-\frac{z^{۳}}{۳!}+\ldots)^{۳}}{۳!}+\cdots=z-\frac{z^{۳}}{۳!}-\frac{z^{۳}}{۳!}+\cdots=z-\frac{z^{۳}}{۳}+\cdots$$

۴۶ـ گزینه «۱» با نوشتن بسط تیلور تابع $\cos z$ داریم:

$$f(z)=\frac{۱-\cos z}{z^{۳}}\cong\frac{\frac{z^{۲}}{۲!}-\frac{z^{۴}}{۴!}+\ldots}{z^{۳}}=\frac{۱}{۲z}-\cdots$$

بنابراین $z=۰$ قطب ساده تابع f است و مانده آن در $z=۰$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

۴۷ـ گزینه «۱» $z=۰$ قطب مرتبه دوم تابع است، لذا داریم:

$$f(z)=\frac{۱}{z(e^{z}-۱)}=\frac{۱}{z(z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۳}}{۳!}+\ldots)}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|l} ۱ & z^{۲}+\frac{z^{۳}}{۲!}+\frac{z^{۴}}{۳!}+\ldots \\ \cline{2-2} \underline{۱+\frac{z}{۲}+\ldots} & z^{-۲}\boxed{-\frac{۱}{۲z}}+\ldots \\ -\frac{z}{۲}+\ldots & \\ \underline{\ldots} & \\ \ldots. & \end{array}$$

ملاحظه می‌گردد ضریب $\frac{۱}{z}$ یا همان مانده در $z=۰$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. البته محاسبه مانده با استفاده از فرمول بسیار راحت‌تر است:

$$z=۰ \text{ مانده در } =\lim_{z\to۰}[(z-۰)^{۲}\frac{۱}{z^{۲}(۱+\frac{z}{۲!}+\frac{z^{۲}}{۳!}+\cdots)}]=\lim_{z\to۰}\frac{-(\frac{۱}{۲!}+\frac{۲z}{۳!}+\cdots)\times۱}{(۱+\frac{z}{۲!}+\frac{z^{۲}}{۳!}+\cdots)^{۲}}=-\frac{۱}{۲}$$

۴۸ـ گزینه «۴»

$$\sec(\frac{1}{z-1})=\frac{1}{\cos(\frac{1}{z-1})}\Rightarrow \frac{1}{z-1}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$z-1=\frac{2}{(2k+1)\pi}\Rightarrow z=\frac{2}{(2k+1)\pi}+1$$

بنابراین تابع بی‌نهایت قطب ساده دارد که با نزدیک شدن به نقطه $z=1$ ($k\to\infty$) قطب‌ها به شدت به یکدیگر نزدیک می‌شوند و لذا قطب $z=1$ یک نقطه تکین اساسی می‌باشد.

۴۹ـ گزینه «۴»

روش اول:

$$f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}}{\frac{z^2}{2!}(1-\frac{2!z^2}{4!}+\frac{2!z^4}{6!}+\cdots)}$$

خب حالا اگر بسط عبارت داخل پرانتز مخرج را بنویسیم، $f(z)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود، دقت کنید از بسط $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots$ استفاده می‌کنیم:

$$f(z)=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)\times\frac{2!}{z^2}(1+\frac{2!}{4!}z^2+\cdots)$$

دقت کنید اگر $\frac{2!}{z^2}$ در جملات پرانتز دوم ضرب شود، داریم:

$$f(z)=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!})(\frac{2!}{z^2}+\frac{2!}{4!}+\cdots)$$

فقط جمله‌ای که از ضرب z در $\frac{2!}{z^2}$ می‌باشد، $\frac{1}{z}$ را تولید می‌کند، لذا ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $2!$ است.

روش دوم: برای محاسبه مانده روش راحت‌تری نیز وجود دارد، دقت کنید $z=0$ یک صفر مرتبه دوم برای تابع $h(z)=1-\cos z$ و در نتیجه یک قطب مرتبه دوم برای تابع $f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}$ است، قبل از ادامه حل، به دلیل اینکه چرا $z=0$ صفر مرتبه دوم تابع $h(z)=1-\cos z$ است، اشاره می‌کنیم:

$$h'(z)=\sin z\ \Rightarrow h'(0)=\sin(0)=0 \quad \text{و} \quad h''(z)=\cos z\ \Rightarrow h''(0)=\cos(0)=1$$

چون مشتق دوم مخالف صفر شد، پس $z=0$ صفر مرتبه دوم است.

$$\text{مانده در } z=0=\lim_{z\to 0}[(z-0)^2(\frac{e^z}{1-\cos z})]'=\lim_{z\to 0}(\frac{z^2e^z}{1-\cos z})'=\lim_{z\to 0}(\frac{z^2e^z}{\frac{z^2}{2}})'=\lim_{z\to 0}(2e^z)'=2$$

۵۰ـ گزینه «۴» با انتگرال‌گیری از $f'(z)$ داریم:

$$f(z)=\cdots+\frac{-a_{-2}}{z}+a_{-1}\operatorname{Ln}z+a_0z+\frac{a_1}{2}z^2+\cdots$$

لازم است $a_{-1}=0$ و به ازای لااقل یک m صحیح منفی $a_m\neq 0$ باشد.

۵۱ـ گزینه «۲»

نکته: اگر تابع $h(z)$ یک صفر از مرتبه $(m+1)$ و $g(z)$ یک صفر از مرتبه m در نقطه $z=z_0$ داشته باشند. می‌توانیم نتیجه بگیریم تابع $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ یک قطب ساده در $z=z_0$ دارد و مانده در این نقطه از رابطه مقابل حساب می‌شود:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=(m+1)\frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m+1)}(z_0)}}$$

ابتدا باید مرتبه صفرهای $g(z)=\sinh z$ و $h(z)=1-\cosh z$ را تعیین کنیم:

$$g(z)=\sinh z\ \Rightarrow g'(z)=\cosh z\ \Rightarrow g'(0)=\cosh(0)=1\neq 0$$

$$h(z)=1-\cosh z\ \Rightarrow h'(z)=-\sinh z\ \Rightarrow h''(z)=-\cosh z\ \Rightarrow h''(0)=-\cosh(0)=-1\neq 0$$

پس $z=0$ صفر مرتبه اول برای تابع $g(z)$ و صفر مرتبه دوم برای تابع $h(z)=1-\cosh z$ می‌باشد و این یعنی $m=1$، لذا داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)=(1+1)\frac{g'(0)}{h''(0)}=\frac{2\times 1}{-1}=-2$$

نوشتن بسط تیلور دو تابع صورت و مخرج کسر و استفاده از بسط برنولی روش دیگر حل این تست است.

۵۲ـ گزینه «۴»

۵۳ـ گزینه «۳» تابع f را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$$

۵۴ـ گزینه «۳» طبق آزمون کوشی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{a^{nz}}{n+1}|}=\frac{|a^z|}{1}<1\Rightarrow|a^z|=|a^{x+iy}|=|a^x||a^{iy}|=|a^x|<1$$

از طرفی $1>a>0$ و لذا شرط تحقق نامساوی فوق آن است که: $x=\mathrm{Re}(z)>0$

۵۵ـ گزینه «۱»

$$\operatorname{cosec}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{\sin\frac{1}{z+1}}\Rightarrow\sin\frac{1}{z+1}=0\Rightarrow\frac{1}{z+1}=k\pi\qquad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{k\pi}-1\qquad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$$

به ازای kهای مختلف بی‌نهایت قطب ساده داریم که با افزایش مقدار k تراکم قطب‌ها در نزدیکی $z=-1$ زیاد شده و لذا نقطه $z=-1$ را تکین اساسی می‌نامیم.

۵۶ـ گزینه «۴»

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})}=\frac{1}{z^2}(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-...)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-...\Rightarrow\begin{cases}a_2=0\\ b_2=1\end{cases}$$

۵۷ـ گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|\frac{z+i}{z-3i}|^n})<1\Rightarrow|\frac{z+i}{z-3i}|<1\Rightarrow|\frac{x+iy+i}{x+iy-3i}|<1\Rightarrow|\frac{x+i(y+1)}{x+i(y-3)}|<1$$

$$\Rightarrow x^2+(y+1)^2<x^2+(y-3)^2\Rightarrow y^2+2y+1<y^2-6y+9\Rightarrow 8y<8\Rightarrow y<1$$

۵۸ـ گزینه «۳» با فرض $z=\frac{1}{w}$، تابع $g(w)=f(\frac{1}{w})=\frac{1}{w}-e^{\frac{1}{w}}$ دارای یک نقطه تکین اساسی در $w=0$ $(z=\infty)$ می‌گردد، لذا بنابر خاصیت نقاط تکین اساسی تابع g در $w=0$ و یا f در $z=\infty$ فاقد حد است.

۵۹ـ گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{e^z\cos z}{z^3}=\frac{(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots)}{z^3}=\frac{1+z+0z^2+\cdots}{z^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\cdots$$

بنابراین بخش اصلی تابع $f(z)$ عبارت است از $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}$ و مانده f در z برابر با صفر است.

۶۰ـ گزینه «۲»

$$L^{-1}[F(s)]=a_{-1}+a_{-2}t+a_{-3}\frac{t^2}{2!}+a_{-4}\frac{t^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_{-(n+1)}\frac{t^n}{n!}$$

با استفاده از آزمون ریشه شعاع همگرایی سری جدید برابر ∞ می‌شود.

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-(n+1)}\frac{1}{n!}|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}=\infty$$

پس سری توانی حاصل در کل صفحه مختلط تحلیلی است.

۶۱ـ گزینه «۲»

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & z\neq ۰\\ ۱ & z=۰\end{cases}$$

تابع $f(z)$ تحلیلی است بنابراین دارای بسط تیلور می‌باشد. اگر بسط تیلور آنرا حول $z=۰$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(۰)z^n}{n!}$$

از طرفی:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n z^{۲n}}{(۲n+۱)!}$$

بنابراین با توجه به اینکه ضریب $z^{۲n}$ در بسط تیلور $f(z)$ به صورت $\dfrac{f^{(۲n)}(۰)}{(۲n)!}$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}=\frac{f^{(۲n)}(۰)}{(۲n)!}\Rightarrow f^{(۲n)}(۰)=\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}$$

◆◆◆◆

۶۲ـ گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{z}{z-k}$$

$$|z|>|k|\Rightarrow\left|\frac{k}{z}\right|<۱\Rightarrow f(z)=\frac{z}{z(۱-\frac{k}{z})}=\frac{۱}{۱-\frac{k}{z}}\quad,\quad\left|\frac{k}{z}\right|<۱\Rightarrow f(z)=۱+(\frac{k}{z})+(\frac{k}{z})^۲+\dots$$

◆◆◆◆

۶۳ـ گزینه «۴»

$$f(z)=\sinh(۲z-i)=(۲z-i)+\frac{(۲z-i)^۳}{۳!}+\dots=۲(z-\frac{i}{۲})+\frac{۲^۳(z-\frac{i}{۲})^۳}{۳!}+\dots$$

بنابراین ضریب $(z-\frac{i}{۲})^۳$ برابر با $\dfrac{۲^۳}{۳!}=\dfrac{۴}{۳}$ می‌باشد.

◆◆◆◆

۶۴ـ گزینه «۱»

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}C_n(z-z_۰)^n$$

$$C_n=\frac{۱}{۲\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_۰)^{n+۱}}dz\Rightarrow\quad C_۲=\frac{۱}{۲\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_۰)^۳}dz\Rightarrow\quad C_۲=\frac{۱}{۲\pi i}\oint\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^۵}dz$$

$z=-\pi i$ قطب مرتبه ۵ می‌باشد و لذا طبق قضیه مانده‌ها خواهیم داشت:

$$\phi(z)=(z+\pi i)^۵\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^۵}=\cosh z$$

$$\Rightarrow b_۱=\frac{\phi^{(۴)}(-\pi i)}{۴!}=\frac{\cosh(-\pi i)}{۴!}=\frac{-۱}{۴!}\quad\Rightarrow\oint\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^۵}dz=۲\pi i b_۱=۲\pi i(\frac{-۱}{۴!})\ \Rightarrow\boxed{C_۲=\frac{-۱}{۴!}}$$

◆◆◆◆

۶۵ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $\tan z$ یک تابع فرد می‌باشد لذا فقط بر اساس توان‌های فرد z بسط می‌یابد و بنابراین ضریب توان‌های زوج z صفر می‌باشد. یعنی $b_۲=۰$

◆◆◆◆

۶۶ـ گزینه «۳»

$$f(z)=\frac{ze^z}{(z-a)^۳}$$

قطب مرتبه ۳ $z=a\Rightarrow\phi(z)=(z-a)^۳f(z)=ze^z\Rightarrow b_۱=\dfrac{\phi^{(۲)}(a)}{۲!}=\dfrac{۲e^a+ae^a}{۲!}=(۱+\dfrac{a}{۲})e^a$

◆◆◆◆

۶۷ـ گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=۰}^{\infty}C_nZ^n\ \Rightarrow\ R=\frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}\\[4ex]\displaystyle\sum_{n=۰}^{\infty}C_nZ^{nk}\ \Rightarrow\ R'=\frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[nk]{|C_n|}}\end{array}\right\}\Rightarrow R'=\frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|C_n|}\right)^{\frac{۱}{k}}}=\left(\frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}\right)^{\frac{۱}{k}}=R^{\frac{۱}{k}}$$

◆◆◆◆

۶۸ـ گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}$$

به طور مثال:

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0 \qquad a_n\neq 0$$

$$P[f(z)]=a_n\left[\frac{1}{(z-z_0)^m}\right]^n+a_{n-1}\left[\frac{1}{(z-z_0)^m}\right]^{n-1}+\dots=\frac{a_n}{(z-z_0)^{mn}}+\frac{a_{n-1}}{(z-z_0)^{m(n-1)}}+\dots$$

z_0 قطب مرتبه mn می‌باشد.

۶۹ـ گزینه «۲»

$$\phi(z)=(z+1)^3 f(z)=\frac{e^z}{z-2}\Rightarrow b_1=\frac{\phi''(-1)}{2!}=\frac{-17}{54e}$$

۷۰ـ گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{2-z}$$

$$\begin{cases}A=2\\B=1\\C=1\end{cases}\Rightarrow f(z)=\frac{2}{z}+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2-z}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$$

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots\right)=\frac{-1}{z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right)-\frac{1}{z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}\right)=\frac{-1}{z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^{n+1}}$$

۷۱ـ گزینه «۱»

$$P(z)=a_0+a_1(z)+\dots a_n z^n$$

برای بررسی وضعیت تابع در ∞ به جای z، $\frac{1}{z}$ قرار داده و وضعیت تابع جدید را در $z=0$ بررسی می‌کنیم.

$$P(\frac{1}{z})=a_0+\frac{a_1}{z}+\dots+\frac{a_n}{z^n}$$

با توجه به اینکه تابع جدید دارای یک قطب مرتبه n در $z=0$ می‌باشد بنابراین تابع اصلی دارای قطب مرتبه n در ∞ می‌باشد.

۷۲ـ گزینه «۴» چون $\frac{g'}{g}(z_n)=\frac{f'}{f}(z_n)$ و z_n دارای نقطه انباشتگی در $z_0\in\Omega$ است، پس در کل حوزه Ω داریم $\frac{f'}{f}=\frac{g'}{g}$. حال چون f' و g' نیز تحلیلی بوده و g^2 مخالف صفر است (مقدار $g(z_0)$ در نقاطی که دنباله حرکت می‌کند، مخالف صفر است):

$$\frac{f'g-fg'}{g^2}=\left(\frac{f}{g}\right)'=0\Rightarrow\frac{f}{g}=k\Rightarrow f=kg$$

تذکر: وقتی $g(z_0)=0$ باشد، آنگاه $f(z_0)=0$ خواهد بود و در نتیجه در این حالت نیز $f=kg$ نتیجه می‌شود.

۷۳ـ گزینه «۱» شعاع همگرایی برابر ۱ می‌باشد پس داریم:

$$\left|\frac{z-i}{z-1}\right|<1\Rightarrow|z-i|<|z-1|\Rightarrow|x+(y-1)i|<|(x-1)+yi|\Rightarrow x^2+(y-1)^2<(x-1)^2+y^2\Rightarrow-2y<-2x\Rightarrow y>x$$

۷۴ـ گزینه «۳»

$$f(z)=\cot(\pi z)=\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi z)}\Rightarrow\sin(\pi z)=0\Rightarrow z=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

۷۵ـ گزینه «۲»

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\Rightarrow(z-1)^5\cos\frac{1}{z-1}=(z-1)^5\left[1-\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\frac{1}{(z-1)^4 4!}-\frac{1}{(z-1)^6 6!}+\dots\right]=$$

$$(z-1)^5-\frac{(z-1)^3}{2!}+\frac{(z-1)}{4!}-\frac{1}{6!}\frac{1}{z-1}+\dots$$

پس مانده در $z=1$ برابر ضریب $\frac{1}{z-1}$ یعنی $-\frac{1}{6!}$ است.

۷۶ـ گزینه «۲» با توجه به بسط لوران تابع $f(z)=e^{-z}$ که بصورت $e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}$ است و همچنین با توجه به اینکه فقط $z=1$ برای تابع $ze^{\frac{-1}{z-1}}$ یک نقطه تکین اساسی است بسط لوران را برای این تابع بصورت زیر می‌نویسیم:

$$ze^{\frac{-1}{z-1}}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{z-1})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(-1)^n}{n!(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{z-1+1}{(z-1)^n})]=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{z-1}{(z-1)^n}+\frac{1}{(z-1)^n}]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[\frac{1}{(z-1)^{n-1}}+\frac{1}{(z-1)^n}]$$

حال برای یافتن مانده‌ی تابع مذکور ضریب $\frac{1}{z-1}$ را در بسط فوق بدست می‌آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[\frac{1}{(z-1)^{n-1}}+\frac{1}{(z-1)^n}]=[(z-1)+1]-[1+\frac{1}{z-1}]+\frac{1}{2}[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}]+\cdots=z-1-\frac{1}{2}.\frac{1}{z-1}+\cdots$$

پس مانده‌ی تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر $\frac{-1}{2}$ می‌باشد.

۷۷ـ گزینه «۳» برای تعیین مرتبه‌ی قطب می‌توان $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را به ازای $m=1,2,\ldots$ محاسبه نمود و مقدار m ای که به ازای آن برای اولین بار حد فوق موجود باشد (متناهی) را مرتبه‌ی قطب گوئیم.

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} z^1\times\frac{\sin z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\Rightarrow$$ قطب از مرتبه‌ی اول است (قطب ساده)

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to 0}z\times\frac{\sin z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

۷۸ـ گزینه «۲»

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots,=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}}\quad,\quad |z|>1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-z)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-1)^{n+1}.z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-n}}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

توجه شود که:
$$\frac{-1}{(-1)^{n+1}}=\frac{1}{(-1)^n}=\frac{1^n}{(-1)^n}=(-1)^n$$

(بسط لوران) و $\frac{1}{z+1}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\quad,\quad |z|<1$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2(\frac{z}{2}+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{z}{2}+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{2^{n+1}}$$

۷۹ـ گزینه «۱» می‌دانیم در توابعی به صورت $\sin\frac{1}{f(z)}$ و $\cos\frac{1}{f(z)}$، قطب‌های تابع $\frac{1}{f(z)}$ تکین اساسی برای توابع مذکور ایجاد می‌کنند پس در تابع داده شده $z=0$ نقطه تکین اساسی است.

۸۰ـ گزینه «۱» در سری داده شده با توجه به گزینه‌ها دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: z عدد حقیقی محض می‌باشد در صورتی که $z=۰$ باشد سری مزبور به سری همساز تبدیل می‌شود که واگرا است و در صورتی که $z>۰$ باشد طبق قانون p سری‌ها همگرا خواهد بود. لذا گزینه‌های ۳ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند.

حالت دوم: z موهومی محض باشد. $(z=ki)$

طبق آزمون ریشه سری همگرا بوده می‌باشد.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(\frac{۱}{n})^{۱+ki}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۱}{n}}=\frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\frac{۱}{۱^+}<۱$$

۸۱ـ گزینه «۱» با استفاده از آزمون ریشه خواهیم داشت:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{n-۲}(\frac{z}{۳})^{n!}}\simeq\lim_{n\to\infty} n\,(\frac{z}{۳})^{(n-۱)!}$$

به ازای $|\frac{z}{۳}|<۱$، مقدار حد فوق برابر صفر می‌گردد. و به ازای $|\frac{z}{۳}|>۱$ ، مقدار حد فوق برابر ∞ می‌گردد و لذا طبق شرط همگرائی مقدار $|\frac{z}{۳}|<۱$ قابل قبول خواهد بود.
$$|\frac{z}{۳}|<۱\ \Rightarrow\ |z|<۳\ \Rightarrow\ R=۳$$

۸۲ـ گزینه «۱»
$$e^z=۱+z+\frac{z^۲}{۲!}+\frac{z^۳}{۳!}+\cdots$$
$$f(z)=\frac{e^{۲z}}{(z-۱)^۳}=\frac{e^{۲(u+۱)}}{u^۳}=\frac{e^۲}{u^۳}.e^{۲u}=\frac{e^۲}{u^۳}[۱+۲u+\frac{(۲u)^۲}{۲!}+\frac{(۲u)^۳}{۳!}+\frac{(۲u)^۴}{۴!}+\cdots]$$
$$=\frac{e^۲}{u^۳}+\frac{۲e^۲}{u^۲}+\frac{۲e^۲}{u}+\frac{۸e^۲}{۶}+\frac{۴ue^۲}{۶}+\cdots=\frac{e^۲}{(z-۱)^۳}+\frac{۲e^۲}{(z-۱)^۲}+\frac{۲e^۲}{(z-۱)}+\frac{۴}{۳}e^۲+\frac{۲}{۳}(z-۱)e^۲+\cdots$$

۸۳ـ گزینه «۲»
$$e^{\frac{۱}{z}}=w\ \Rightarrow ۲k\pi i+\frac{۱}{z}=\log w\ \Rightarrow z=\frac{۱}{\log w-۲k\pi i}$$

برای هر همسایگی صفر مانند V چون $|z|$ با افزایش k به صفر نزدیک می‌شود پس حتماً $\underline{\underline{N}}$ وجود دارد که برای هر $k>N$ ، z عضو V است به نوعی دیگر برای پاسخ این تست به بیان ساده‌تر می‌توانیم اینگونه استدلال کنیم که چون $z=۰$ نقطه تکین اساسی $w=e^{\frac{۱}{z}}$ است پس مقدار این تابع در نقطه $z=۰$ می‌تواند برابر هر عدد دلخواهی گردد.

۸۴ـ گزینه «۳»
$$f(z)=\frac{z}{(z-۱)(z+۲)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{z-۱}+\frac{\frac{۲}{۳}}{z+۲}\Rightarrow f(z)=\frac{\frac{۱}{۳}}{z-۱}+\frac{\frac{۲}{۳}}{z-۱+۳}=\frac{\frac{۱}{۳}}{z-۱}+\frac{\frac{۲}{۳}}{۳[۱+\frac{z-۱}{۳}]}=\frac{\frac{۱}{۳}}{z-۱}+\frac{۲}{۹}[\frac{۱}{۱+\frac{z-۱}{۳}}]$$

با استفاده از بسط $\frac{۱}{۱+u}=۱-u+u^۲-u^۳+\cdots$ داریم:
$$=\frac{\frac{۱}{۳}}{z-۱}+\frac{۲}{۹}[۱-\frac{(z-۱)}{۳}+\frac{(z-۱)^۲}{۹}-\frac{(z-۱)^۳}{۲۷}+\cdots]=\frac{۱}{۳(z-۱)}+\frac{۲}{۹}-\frac{۲}{۲۷}(z-۱)+\frac{۲}{۸۱}(z-۱)^۲-\cdots$$

پس ضریب $(z-۱)^۲$ برابر $\frac{۲}{۸۱}$ می‌باشد.

۸۵ـ گزینه «۲» شعاع همگرایی برای این تست از رابطه‌ی روبرو محاسبه می‌شود.
$$\min|z-z_۰|=\min\{\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۱۰}\}=\sqrt{۲}\qquad \text{و}\qquad z=۱,-۱,۲,۳\qquad \text{و}\qquad z_۰=i$$

توضیح اینکه کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی $z_۰=i$ تا نقاط غیر تحلیلی $(z=۱\ ,\ -۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)$ شعاع همگرایی محسوب می‌گردد.

۸۶ـ گزینه «۴» ابتدا شعاع همگرایی هر کدام از سری‌ها را بدست می‌آوریم:

$$f(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=-g(z)-h(z)\Rightarrow g(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n\Rightarrow a_n=1\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$$

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to-\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$$

حال ناحیه همگرایی هر کدام از سری‌های $h(z),g(z)$ را بدست می‌آوریم قسمت مشترک این دو ناحیه، ناحیه همگرایی سری $f(z)$ خواهد بود.

$$\left.\begin{aligned}&g(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n=\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\Rightarrow|z^{-1}|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>1\\&h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\Rightarrow|z|<2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 1<|z|<2$$

۸۷ـ گزینه «۳» بر طبق آزمون کوشی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+i|^n\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n(n+1)}}<1$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|n+i|\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|n+i|}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}<0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-i}{2}\right|^{n+1}=0\Rightarrow|z-i|<2$$

بنابراین، شعاع همگرائی برابر ۲ می‌باشد.

۸۸ـ گزینه «۱» طبق قضیه پیکارد یک تابع در هر همسایگی یک نقطه تکین اساسی خود، هر مقدار متناهی به جزء احتمالاً یک مقدار را بی‌نهایت بار اختیار می‌کند. (برای توضیح بیشتر به کتاب چرچیل مراجعه فرمایید.)

۸۹ـ گزینه «۱»

$$f(z)=\frac{e^{i\pi z}}{(z-1)^3}\Rightarrow(z-1)^3=0\Rightarrow z=1$$ قطب از مرتبهٔ ۳:

$$\Rightarrow\operatorname*{Rez}_{z=1}f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-1)^3.e^{i\pi z}}{(z-1)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{d^2(e^{i\pi z})}{dz^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}[i\pi(e^{i\pi z})']=\frac{1}{2}\times i\pi\times i\pi\times e^{i\pi}=\frac{-\pi^2}{2}\times e^{i\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

۹۰ـ گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرایی را بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1\Rightarrow R=1$$

حال ناحیهٔ همگرایی را محاسبه می‌نمائیم:

$$\left|\frac{3z+4}{3z+1}\right|<1\Rightarrow|3z+4|<|3z+1|\Rightarrow|(3x+4)+3yi|<|(3x+1)+3yi|$$

$$\Rightarrow\sqrt{(3x+4)^2+(3y)^2}<\sqrt{(3x+1)^2+(3y)^2}\Rightarrow(3x+4)^2+(3y)^2<(3x+1)^2+(3y)^2\Rightarrow(3x+4)^2<(3x-1)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2+16+24x<9x^2+1+6x\Rightarrow 18x<-15\Rightarrow x<\frac{-15}{18}\to\operatorname{Re}(z)<\frac{-5}{6}$$

تست‌های تکمیلی

۱ـ سری تیلور تابع $f(z)=\cos^2 z$ حول نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$ ۲) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$ ۳) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$ ۴) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$

۲ـ مانده تابع $z^{10}e^{\frac{1}{z}}$ در نقطه منفرد آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{10!}$ ۲) $\frac{1}{11!}$ ۳) $\frac{1}{12!}$ ۴) $\frac{1}{9!}$

۳ـ سری تیلور تابع $\frac{1}{z^2}$ حول نقطه $z_0=2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(\frac{z-2}{2})^n$ ۲) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(\frac{z-2}{2})^n$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(\frac{z-2}{2})^n$ ۴) $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(z-2)^n}{2}$

۴ـ سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه $|z-1|>2$، کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$

۵ـ ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $2<|z+1|<3$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) صفر

۶ـ مانده تابع $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) e ۳) ۱ ۴) πei

۷ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\cos in.z^n$ کدام است؟

۱) e ۲) e^{-1} ۳) $\frac{1}{2e}$ ۴) $\frac{1}{3-e}$

۸ـ قلمرو همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+2i}{6})^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ کدام است؟

۱) $|z+2i|<6$ ۲) $|z+2i|>5$ ۳) $|z+2i|<6$ ۴) $|z+2i|>5$ و $|z+2i|<6$

۹ـ مانده تابع $f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$ در $z=0$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۴- ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۰ـ مانده تابع $f(z)=\frac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲۴

۱۱ـ مانده تابع $f(z)=\frac{(1-\cosh z)\sinh z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۱۲ـ مانده تابع $f(z)=\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{16}{3}$

۱۳ـ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $z=0$ یک قطب مرتبه چهارم برای تابع $f(z)=\frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$ می‌باشد.

۲) $z=0$ یک قطب برداشتنی برای تابع $f(z)=\frac{Ln(1+z^3)}{z^2}$ می‌باشد.

۳) $z=0$ یک قطب ساده برای تابع $f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^4}$ می‌باشد.

۴) $z=1$ یک قطب ساده برای تابع $f(z)=\frac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$ می‌باشد.

۱۴ـ نقطه $z=0$ قطب برداشتنی برای کدام تابع نمی‌باشد؟

۱) $z\sinh(\frac{1}{z})$ ۲) $\frac{\sinh z}{z}$ ۳) $\frac{\sin^2 z}{z}$ ۴) $\cos\frac{1}{z}+\sin\frac{2-\pi z}{2z}$

۱۵ـ مرتبه صفر در نقطه $z=0$ برای کدام تابع با بقیه فرق می‌کند؟

۱) $f(z)=z^4+4z^2$ ۲) $f(z)=z^6[(\frac{z}{2})^2-(\sin\frac{z}{2})^2]^{-1}$ ۳) $f(z)=e^{\sin z}-e^{tgz}$ ۴) $f(z)=(e^z-e^{z^2})Ln(1-z)$

۱۶ـ حاصل سری $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$ ۲) $\frac{\pi}{\sin^2\pi a}$ ۳) $\frac{2\pi^2}{\sin^2\pi a}$ ۴) $\frac{\pi^2}{\sin^2\frac{\pi}{a}}$

۱۷ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+in)(z+1+i)^n$ کدام است؟

۱) $|z-1-i|<1$ ۲) $|z+1+i|<1$ ۳) $|z+1-i|<3$ ۴) $|z-1+i|<1$

۱۸ـ اگر $|a|<|b|$ و $b\neq 0$ آنگاه ناحیه همگرایی سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$ کدام است؟

۱) $|z|>|a|$ ۲) $|z|<|b|$ ۳) $|a|<|z|<|b|$ ۴) سری همه‌جا همگراست.

۱۹ـ سری لوران $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ در ناحیه $0<|z-i|<2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$

۲) $-\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$

۳) $\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$

۴) $-\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$

۲۰ـ سری لوران $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}$ در ناحیه $|z+2|>4$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\times 4^n}{(z+2)^{n+3}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\times 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\times 4^{n+1}}{(z+2)^{n+2}}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\times 4^{n-1}}{(z+2)^{n+2}}$

تکیه بر جای بزرگان نتوان زد به گزاف — مگر اسباب بزرگی همه آماده کنی (حافظ)

هان ای دل عبرت بین از دیده نظر کن — ایوان مدائن را آیینه عبرت دان (خاقانی)